

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Северо-Западный заочный политехнический институт

Б. М. Беляев

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ
И РЕГУЛЯТОРОВ

Утверждено редакционно-издательским советом
института в качестве учебного пособия

Ленинград 1985

УДК 62-526.001.2 075.8

Беляев Б.М. Современные методы проектирования следящих систем и регуляторов: Учеб. пособие. - Л.: СЗШИ, 1985, - 80 с., 20 ил.
Библиогр. 22.

В пособии приведены общие сведения о следящих системах и регуляторах и современных принципах их проектирования, ориентированных на применение интегральных схем и микропроцессоров как элементов регуляторов, больших и малых ЦВМ как средств механизации и автоматизации процесса проектирования и САПР САУ. Рассмотрены математические модели динамических систем. При этом значительное внимание удалено дискретным формам математических моделей, преобладающим в условиях широкого использования ЦВМ. Описаны и доведены до граф-схем различной степени детализации машинно-ориентированные алгоритмы проектирования следящих систем преимущественно на основе частотных методов. Изложены методы проектирования регуляторов промышленных систем и их настройки по различным критериям качества.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 0606, изучающих курс "Следящие системы и регуляторы", и может быть полезно при курсовом и дипломном проектировании.

Рецензенты: кафедра автоматики и процессов управления ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина); С. В. Шлепков, канд. техн. наук, доц. кафедры "Электропривод и автоматизация промышленных установок" ЛПИ им. М. И. Калинина.

(С) Северо-Западный заочный политехнический институт, 1985

Введение

Характерной особенностью современного развития теории и практики проектирования технических устройств, в том числе следящих систем и регуляторов, является широкое применение на всех этапах вычислительной техники от простейших логических схем до цифровых вычислительных машин (ЦВМ) и вычислительных сетей.

ЦВМ в настоящее время используются не только как мощное средство для выполнения отдельных рутинных расчетов, благодаря их развитой логике при наличии соответствующего математического и технического обеспечения для автоматизации сквозного проектирования, что нашло своё отражение в системах автоматизированного проектирования (САПР), которые, возникнув первоначально для сквозного проектирования таких сложных систем, как ЦВМ, трассировки интегральных схем и печатных плат, начали быстро внедряться во все области техники.

В связи с этим, говоря о современных методах проектирования следящих систем и регуляторов, необходимо их рассматривать в плане САПР, а это – прежде всего машинная ориентация методов.

ЦВМ и отдельные элементы цифровой вычислительной техники в настоящее время все шире начинают использоваться в качестве элементов систем автоматического управления. Так, основным модулем регуляторов локальных систем становится микропроцессор.

Цель данного учебного пособия – отразить позитивные сдвиги в методах проектирования следящих систем и регуляторов, обусловленные кибернетическим направлением НТР.

Глава I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

I. Общие сведения о следящих системах

Определение и назначение следящих систем

В соответствии с классификацией систем автоматического управления (САУ) [5] следящими системами (СС) называются такие САУ, которые на выходе воспроизводят задаваемую на входе величину, изменяющуюся произвольно во времени.

В практике чаще всего под СС понимают замкнутые динамические системы, осуществляющие линейное или круговое перемещение рабочих органов объектов управления, в качестве которых могут быть антенна радиолокационной станции, артиллерийская установка, моделирую-

щие стойды, инструмент металлорежущих станков и др. Такие СС получили название позиционных следящих систем.

Упрощённым примером схемного решения может быть СС, представленная на рис. I. Система состоит из объекта управления ОУ, выходной величиной которого является угол поворота рабочего органа $\alpha_{вых}$, исполнительного двигателя ИД, редуктора Р, усилителя У, измерителя рассогласования ИР, состоящего, в свою очередь, из двух потенциометров: потенциометра датчика ПД, движок которого механически связан с командной осью, и потенциометра приемника ПП, движок которого соединен с выходной осью ОУ.

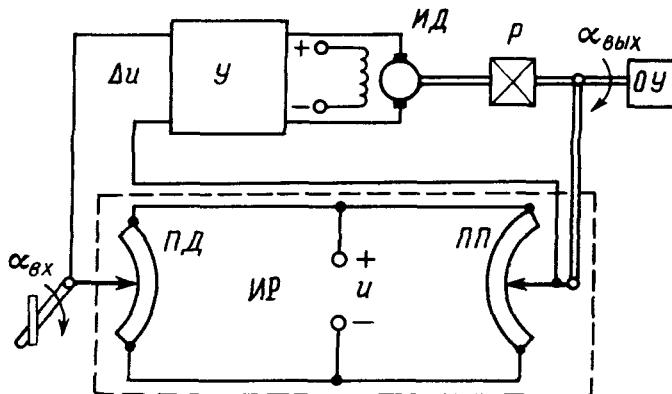


Рис. I. Принципиальная схема простейшей следящей системы

Основной задачей СС является слежение выходного вала ОУ за положением командной оси. Если $\alpha_{вых} \neq \alpha_{вх}$, то за счёт разбаланса потенциометрического моста появляется сигнал рассогласования ΔU , который через усилитель воздействует на ИД в направлении согласования выхода с входом.

Конкретная СС отличается от данной системы типом ИД, схемой ИР и У, назначением дополнительных элементов и т.п.

Классификация следящих систем

С позиций проектирования всё многообразие СС можно классифицировать по основным признакам, связанным с принципами построения и действия, спецификой работы и т.п. (рис.2) [II].

Условия работы и предъявляемые к СС требования во многом опре-

деляются их назначением. В сравнительно благоприятных условиях находятся наземные стационарные системы, которые, как правило, не ограничены жесткими требованиями по массе и габаритам. Напротив, к бортовым СС по данным параметрам предъявляются повышенные требования и накладываются ограничения по потреблению энергии. Промышленные системы должны быть простыми по конструкции, иметь высокую технологичность, максимальную унификацию узлов и деталей.



Рис.2. Классификация следящих систем

В позиционных СС выходной величиной является круговое или линейное перемещение объекта управления, а в скоростной – частота вращения выходного вала ИД. Комбинированные СС представляют собой либо сочетание систем замкнутого и разомкнутого циклов, либо сочетание позиционной и скоростной систем, работающих на один вал.

Многоканальные СС используются для повышения точности слежения. Каналы грубого и точного отсчетов связаны между собой по входам с помощью механического или электрического редуктора.

Функциональная схема следящей системы и её элементы

Функциональная схема СС в простейшем варианте представлена на рис. 3. Схема содержит ряд элементов, характерных для большинства одноканальных СС: ИР – измеритель рассогласования; ПЭ – преобразующий элемент; УП – предварительный усилитель; УМ – усилитель

мощности; ИП - источник питания; ПКУ - параллельное корректирующее устройство; ИД - исполнительный двигатель; Р - редуктор; ОУ - объект управления; $\alpha_{вх}$, $\alpha_{вых}$ - входная и выходная величины; СЧ - силовая часть СС; f - возмущающее воздействие.

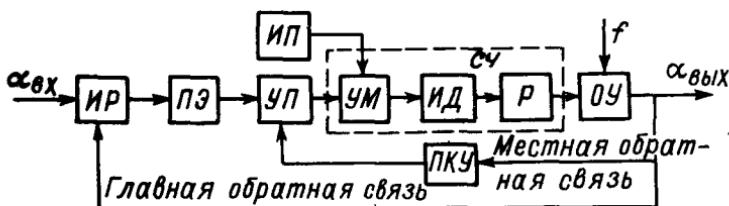


Рис. 3. Функциональная схема следящей системы

В ИР производится сравнение $\alpha_{вх}$ и $\alpha_{вых}$ и формируется сигнал рассогласования, пропорциональный $\Delta\alpha = \alpha_{вх} - \alpha_{вых}$.

Преобразующий элемент служит для преобразования сигнала рас-
согласования к виду, удобному для дальнейшего использования. В
данном элементе сигнал ошибки подвергается обработке, обеспечи-
вающей нормальное функционирование СС, уменьшение уровня помех и
введение в закон слежения составляющих, пропорциональных произ-
водным или интегралам от ошибки.

Предварительный усилитель УП усиливает сигнал с ПЭ по напряжению и мощности и суммирует основной сигнал с сигналом от ПКУ.

Силовая часть системы состоит из УМ, ИД и Р. Необходимо отметить, что проектирование СС начинается с выбора и расчета СЧ.

Рассмотренная схема соответствует непрерывной системе. В цифровой, импульсной и релейной системах один или ряд элементов будут представлены цифровым (в ряде случаев ЦВМ), импульсным или релейным элементами соответственно.

Для цифровых систем характерно наличие дополнительных элементов, связывающих цифровую часть с непрерывной, - аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей (ЦАП и АЦП).

Основные особенности следящих систем

Главной особенностью СС является то, что задание на сложение изменяется по произвольному заранее не известному закону.

На практике неопределенность в отношении входного сигнала разрешается в результате анализа СС в зависимости от её назначения, ОУ и других признаков, т.е. в каждом конкретном случае можно указать наиболее возможный закон слежения. Например, для дистанционных СС в ряде случаев имеет место режим отработки сигналов, изменяющихся скачком и постоянных в течение последующего времени. Иногда закон слежения может быть описан максимальными значениями входного воздействия α_{max} и его производных по времени $\dot{\alpha}_{max}$, $\ddot{\alpha}_{max}$. В этом случае оно приводится к эквивалентному гармоническому закону [2]

$$\alpha_{bx}(t) = A_3 \sin \omega_3 t, \quad (I.1)$$

$$\text{где } \omega_3 = \ddot{\alpha}_{max} / \dot{\alpha}_{max}; \quad A_3 = \dot{\alpha}_{max}^2 / \ddot{\alpha}_{max}. \quad (I.2)$$

Для систем сопровождения самолётов, летящих в одной плоскости, равномерно и прямолинейно, закон слежения записывается в виде [10]

$$\alpha_{bx}(t) = \arctg \frac{v}{d} t, \quad (I.3)$$

где v – линейная скорость самолёта; d – минимальная дальность до самолёта. В случае пренебрежения кривизной земной поверхности данный закон будет справедлив и для СС слежения за спутниками.

Другая особенность СС обусловлена элементной базой. Во-первых, СС содержат ИД и усилитель мощности, т.е. относятся к САУ непрямого регулирования. Во-вторых, ИР, как правило, состоит из двух одинаковых датчиков, первый из которых является задатчиком (его обычно называют датчиком с указанием типа, например, сельсин-датчик, а второй выполняет роль измерителя выходной величины (его называют приемником, например, сельсин-приемник). В-третьих, коррекция СС чаще всего выполняется посредством использования сигнала от тахогенератора (ТГ). Ряд специально предназначенных для СС ИД имеют встроенные ТГ. Следующая особенность заключается в том, что позиционные и комбинированные СС обладают астатизмом.

2. Общие сведения о регуляторах

Определение и назначение регуляторов

Под регуляторами понимают комплекс взаимодействующих между собой элементов САУ, формирующих управляющее воздействие на объект с целью достижения требуемых показателей качества его работы.

В таких важнейших отраслях промышленности, как энергетика, металлургия, химия, нефтепереработка и другие, нет предприятий и да-

же отдельных цехов, в которых не использовались бы автоматические регуляторы. Регулятор совместно с объектом управления образует САУ.

Схема простейшей САУ изображена на рис.4. К объекту управления ОУ принят относить регулируемый участок 1, чувствительный элемент 2 и регулирующий орган 3. Регулирующий орган непосредственно воздействует на процессы в объекте путем изменения притока энергии или вещества. Чувствительный элемент измеряет значение регулируемой величины и преобразует её в сигнал, удобный для работы последующих устройств. Текущее значение сигнала на выходе чувствительного элемента считать выходной координатой $X_{\text{вых}}$ ОУ.

Основными элементами автоматического регулятора являются входное устройство 4, формирующее устройство 5, исполнительный механизм 6 и задатчик 7.

Входное устройство предназначено для получения сигнала рассогласования $\Delta X = X_{\text{зад}} - X_{\text{вых}}$.

Часто во входном устройстве алгебраически суммируются сигналы двух и более чувствительных элементов. Такие устройства предназначены обычно для регулирования соотношений расходов, введения дополнительных сигналов и т.п.

Формирующее устройство 5 предназначено для преобразования сигнала ΔX таким образом, чтобы на выходе исполнительного механизма получить заданный закон регулирования.

Типовые регуляторы и их динамические характеристики

Наиболее широкое распространение в промышленных автоматических системах получили линейные типовые законы регулирования: пропорциональный, интегральный, пропорционально-интегральный, пропорционально-дифференциальный и пропорционально-интегрально-дифференциальный. Соответственно реализуемым законам управления регуляторы получили названия: П, И, ПИ, ПД и ПИД-регуляторов.

П-регулятор. Процессы в П-регуляторе описываются уравнением

$$U = K_p \cdot \varepsilon, \quad (I.4)$$

где U – управляющее воздействие, создаваемое регулятором; K_p – коэффициент передачи; $\varepsilon = \Delta x = x_{\text{заг}} - x_{\text{вых}}$ – сигнал рассогласования. Передаточная функция регулятора соответствует передаточной функции безынерционного звена

$$K_n(p) = K_p. \quad (I.5)$$

Переходные и частотные функции данного звена рассматриваются в курсе теории автоматического управления (ТАУ). Недостатком П-регулятора является наличие статической ошибки.

I-регулятор. Процессы в I-регуляторе описываются уравнением

$$U = \frac{1}{T_n} \int_0^t \varepsilon dt, \quad (I.6)$$

где T_n – постоянная интегрирования. Регулятор имеет передаточную функцию

$$K_n(p) = 1/(T_n p), \quad (I.7)$$

что соответствует передаточной функции интегрирующего звена, характеристики которого известны из курса ТАУ.

ПИ-регулятор. Процессы в ПИ-регуляторе описываются уравнением

$$U = K_p (\varepsilon + \frac{1}{T_n} \int_0^t \varepsilon dt), \quad (I.8)$$

где T_n – постоянная интегрирования, которую иногда называют временем изодрома или удвоения. Передаточная функция ПИ-регулятора имеет вид

$$K_{nII}(p) = K_p (T_n p + 1)/(T_n p), \quad (I.9)$$

т.е. ПИ-регулятор в динамическом отношении представляет собой последовательное соединение интегрирующего и реально-дифференцирующего звеньев. Достоинством ПИ-регулятора является то, что в начале переходного процесса он ведет себя как П-регулятор, т.е. мгновенно реагирует на изменения рассогласования, а в дальнейшем как I-регулятор, выбирая ошибку системы. Устойчивость системы с П-регулятором значительно выше, чем с I-регулятором. Таким образом, ПИ-регулятор по точности обладает достоинством I-регулятора, а по устойчивости и быстродействию приближается к П-регулятору.

ПД-регулятор. Процессы в ПД-регуляторе описываются уравнением

$$U = K_p (\varepsilon + T_d d\varepsilon/dt), \quad (I.10)$$

где T_d – постоянная дифференцирования или предварения. Передаточная функция ПД-регулятора соответствует передаточной функции схе-

мы, состоящей из параллельного соединения безынерционного и дифференцирующего звеньев,

$$K_{\text{ПД}}(P) = K_P (T_D P + 1). \quad (\text{I.II})$$

Этот регулятор подобно П-регулятору обладает остаточной неравномерностью

$$\varepsilon_{\max} = 1/K_P, \quad (\text{I.I2})$$

однако в отличие от П-регулятора реагирует не только на отклонение регулируемой величины от заданного значения, но и на скорость его изменения.

ПИД-регулятор. Процессы в ПИД-регуляторе описываются дифференциальным уравнением

$$U = K_P (\varepsilon + T_D \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{T_N} \int_0^t \varepsilon dt). \quad (\text{I.I3})$$

Передаточная и частотная функции регулятора соответственно имеют вид:

$$K_{\text{ПИД}}(P) = K_P (T_D T_N P^2 + T_N P + 1) / (T_N P); \quad (\text{I.I4})$$

$$K_{\text{ПИД}}(j\omega) = K_P (1 - j(1 - T_D T_N \omega^2) / (T_N \omega)). \quad (\text{I.I5})$$

Если выполняется условие $\omega < \omega_{rp} = \sqrt{1/T_D T_N}$, то (I.I5) можно упростить,

$$K_{\text{ПИД}}(j\omega) \approx K_P (1 - j/T_N \omega). \quad (\text{I.I6})$$

Отсюда следует, что в области низких частот ПИД-регулятор ведет себя как П-регулятор. Если выполняется условие $\omega > \omega_{rp}$, то

$$K_{\text{ПИД}}(j\omega) \approx K_P (1 + jT_D \omega), \quad (\text{I.I7})$$

т.е. в области высоких частот ПИД-регулятор соответствует Д-регулятору.

Классификация промышленных регуляторов

Промышленные автоматические регуляторы можно классифицировать по различным признакам: по виду используемой энергии, назначению, законам регулирования, заводу-изготовителю, принципам построения, поколениям и т.п. С детальной классификацией можно ознакомиться в работах [4, 10, 21].

Электрические регуляторы получили наиболее значительное распространение, так как обладают практически неограниченным радиусом действия, позволяют легко выполнять основные алгебраические операции, а также интегрирование и дифференцирование. Электронные

усилители электрических регуляторов практически безынерционны и имеют большие коэффициенты усиления.

Пневматические регуляторы являются основными в таких отраслях промышленности, как химическая, нефтеперерабатывающая, деревообрабатывающая, газовая и пищевая. Это прежде всего связано с пожаро- и взрывобезопасностью пневматической аппаратуры. В нашей стране разработана и освоена "Универсальная система элементов промышленной пневмоавтоматики" (УСЭПА). Набор элементов УСЭПА является функционально полным и позволяет построить любое управляющее устройство непрерывного или непрерывно-дискретного действия.

Гидравлические регуляторы применяются главным образом там, где требуется быстрая отработка мощного выходного сигнала и при этом невелико расстояние между отдельными устройствами регулятора. К достоинствам этих регуляторов следует отнести их простоту, надёжность работы, нечувствительность к вибрации и удобство преобразования энергии жидкости в усилие без применения промежуточных механизмов. При тех же массах и габаритах мощность гидравлического исполнительного механизма в несколько раз больше, чем электрического или пневматического. Большинство промышленных гидравлических регуляторов предназначено для регулирования одного параметра или соотношения двух параметров.

Признак поколения наиболее ярко проявляется на электрических регуляторах. Здесь можно выделить четыре поколения регуляторов.

В первом поколении регуляторов основу функциональных узлов составляют электронные лампы. Примером могут служить электронные регуляторы типа ИРМ-240, БРМ-II, БРМ-2I, ЭР, регуляторы унифицированной системы автоматического контроля и регулирования (УСАКР) РУ4-16A, РУ4-26 и др.

Регуляторы второго поколения построены на полупроводниковых элементах. Примером может служить регулирующая аппаратура электронной агрегатной унифицированной системы (ЗАУС), в которой многие блоки выполнены на транзисторной базе. Своё логическое завершение регуляторы второго поколения нашли в системе "Каскад" [4, 12], которая в настоящее время широко используется для создания САУ различными технологическими процессами.

В состав системы "Каскад" входят следующие блоки и устройства: измерительный блок И04; алгебраические блоки А04, А31, А32, А33; логические блоки Л02, Л04; нелинейные преобразователи Н02, Н04;

регулирующие блоки Р21, Р23, Р12, Р132; выносные устройства оперативного управления ВУ12, ВУ21; блоки динамических преобразователей ДО1, ДО3; задающие устройства ЗУ05, ЗУ11; пусковые и усилиительные устройства У21, У22, У252; исполнительные механизмы типа МЭОБ21 и МЭОК21; вспомогательные устройства ВО1, В21. Все устройства построены по блочно-модульному принципу и имеют унифицированную конструкцию.

Регуляторы третьего поколения выполняются в микроэлектронном исполнении. Основу их составляют аналоговые и цифровые микросхемы различной степени интеграции. К данному поколению регуляторов относится агрегатный комплекс электрических средств регулирования в микроэлектронном исполнении (АКЭСР) [1]. АКЭСР представляет собой гибридную систему, состоящую из отдельных устройств, отличающихся по функциональному и технологическому признакам и предназначенных для формирования информации, её алгебраической, динамической, логической обработки и хранения, а также формирования команд управления. На базе устройств АКЭСР возможно построение разнообразных систем регулирования и управления технологическими процессами от простейших сигнализаторов и позиционных регуляторов до больших и сложных САУ с алгоритмами автоматической подстройки статических и динамических параметров и изменения топологической структуры. В состав АКЭСР входят 29 функциональных и регулирующих блоков, выполненных на базе 35 модулей. Отличительной особенностью характеристик и свойств АКЭСР является функциональная полнота, алгоритмичность, сравнительная однородность, высокая степень интеграции функциональных элементов отдельных блоков и их составных частей и широкая номенклатура сигналов связи. По конструктивным особенностям изделия комплекса АКЭСР делятся на четыре группы: блоки щитового утопления (приборное исполнение); блоки для монтажа в шкафах унифицированных типовых конструкций (шкафное исполнение); блоки для утопленного монтажа на оперативных пультах управления, щитах и мнемосхемах в вертикальной или наклонных плоскостях; блоки для настенного монтажа в вертикальной плоскости или в стеллажах (контейнерное исполнение).

Системные, схемотехнические и конструктивные принципы, положенные в основу АКЭСР, позволяют наращивать его вычислительные и алгоритмические мощности путём создания дополнительных устройств на базе имеющихся модулей и конструктивов.

Регуляторы четвертого поколения построены на микропроцессорных системах. Современная тенденция создания САУ предусматривает замену устройств с "жёсткой" логикой на программируемые устройства, построенные на микропроцессорах. Основным преимуществом микропроцессорных САУ является повышенная надежность и гибкость в изменении алгоритма управления. Модификация микропроцессорных САУ часто состоит в вариации последовательности команд, а иногда – просто в замене постоянного запоминающего устройства. Отсюда следует, что при проектировании микропроцессорных САУ существенное значение приобретает проектирование на алгоритмическом и программном уровнях. Программные модули в этом случае являются аналогами аппаратных средств в регуляторах с "жёсткой" логикой.

Для построения микропроцессорных регуляторов используются универсальные микропроцессорные комплекты интегральных схем. К этой группе интегральных схем принадлежат такие широко известные комплексы, как K580, K582, K589, MCS80, MCS86, I3000 (фирма *Intel*), M6800 и M10800 (фирма *Motorola*), F8 (фирма *Fairchild*) и др.

Интегральные схемы, на которых проектируется собственно микропроцессор, образуют так называемый базовый комплект интегральных схем, который может состоять из одной большой интегральной схемы (БИС) – однокристальный микропроцессор, двух БИС – двухкристальный микропроцессор, нескольких БИС – многокристальный микропроцессор. Интегральные схемы различной степени интеграции, необходимые для построения остальных устройств: памяти, устройств ввода-вывода информации и связи с объектом управления и т.п., дополняют базовый комплект до собственно микропроцессорного регулятора.

Обобщенная схема собственно микропроцессорной части регулятора представлена на рис.5, где АЛУ – арифметико-логическое устройство; УУ – устройство управления; ОЗУ, ПЗУ, ППЗУ – оперативное, постоянное и программируемое постоянное запоминающие устройства соответственно. Микропроцессор, осуществляющий обработку информации совместно с другими БИС, связан с ними одной, двумя или тремяшинами. Как видно из схемы, микропроцессорный регулятор имеет четыре группы интегральных схем: 1) базовый комплект; 2) интегральные схемы запоминающих устройств; 3) интегральные схемы, осуществляющие связь между микропроцессором и устройствами ввода-вывода информации (дисплеи, АЦПУ, графопостроители, фотосчитыватели и т.п.); 4) интегральные схемы, выполняющие связь микропроцессо-

ра с объектом управления (АЦП, ЦАП, компраторы, усилители, контроллеры и др.). Необходимым условием эффективного использования микропроцессорного регулятора является совместимость интерфейсов

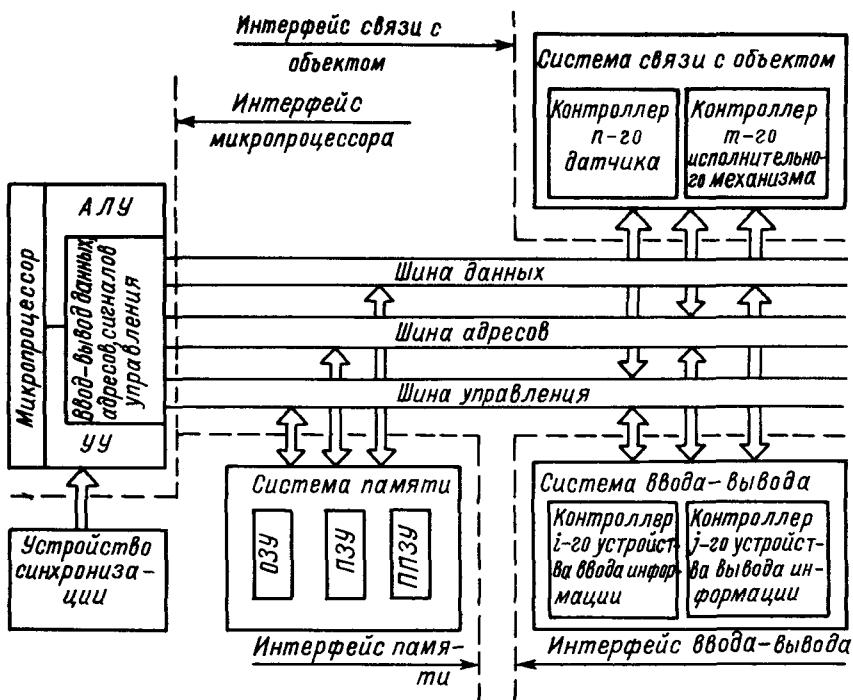


Рис. 5. Структура микропроцессорной части регулятора

микропроцессора, систем памяти, ввода-вывода информации и связи с управляемым объектом. Более подробно со специальными вопросами построения микропроцессорных систем можно ознакомиться в [9, Г7].

3. Общие сведения о современных принципах и методах проектирования следящих систем и регуляторов

Государственная система промышленных приборов и средств автоматизации

Технические особенности различных производств, широкий круг решаемых задач управления, различия в условиях эксплуатации, много-

образие и широкий диапазон измеряемых и регулируемых параметров требует огромной номенклатуры различных технических средств: датчиков, измерительных приборов, регуляторов, исполнительных механизмов, регистрирующих устройств и других средств автоматизации объектов управления.

Для экономически и технически целесообразного решения проблемы обеспечения народного хозяйства техническими средствами автоматики и сокращения их номенклатуры создана Государственная система промышленных приборов и средств автоматизации (ГСП), определяемая ГОСТом 12997-76 и представляющая собой совокупность унифицированных приборов и устройств, у которых обеспечивается эксплуатационная, информационная, функциональная, метрологическая и конструктивная совместимость.

Основными принципами создания ГСП является унификация и нормализация приборов и устройств по выполняемым функциям, физической природе и параметрам входных и выходных сигналов, по номинальным значениям основных и вспомогательных параметров, конструктивному исполнению.

Все устройства ГСП по функциональному назначению подразделяются на четыре группы: 1) для получения нормированной информации о состоянии процесса; 2) для приема, преобразования и передачи информации по каналам связи; 3) для преобразования, хранения и обработки информации и формирования команд управления; 4) для использования командной информации в целях воздействия на управляемый процесс или представления оператору.

По характеру сигналов изделия ГСП делятся на аналоговые и дискретные. Наибольшее распространение в изделиях ГСП получили аналоговые электрические сигналы постоянного тока 0...5 мА, постоянного напряжения 0...10 В в соответствии с ГОСТ 9895 - 78 и пневматический сигнал $(0,2 - 1,0) \times 9,81 \cdot 10^{-4}$ Па.

Для конструктивного оформления изделия ГСП приняты унифицированные типовые конструкции (УТК). Изделия УТК подразделяются на четыре группы так, что изделия низшей группы встраиваются в изделия высшей. К нулевой группе относятся монтажные платы, к первой – субблоки, состоящие из монтажной платы, защитной рамки и контактной колодки или разъема для внешних связей. Субблоки встраиваются в блочные каркасы, являющиеся изделиями второй группы УТК. В свою очередь блоки устанавливаются в стойки, шкафы, щиты, пуль-

ты, столы, которые представляют собой изделия третьей группы УТК.

Блочно-модульный принцип построения систем позволяет строить различные по назначению, выполняемым функциям и сложности автоматические системы.

Современное развитие ГСП характеризуется созданием агрегативных комплексов и систем, примером которых является АКЭСР.

Степени механизации и автоматизации проектирования

Механизация и автоматизация проектирования следящих систем и регуляторов, а также в целом САУ в настоящее время приобретает особо важное значение. Основой технической базы механизации и автоматизации проектных работ является ЦВМ.

По степени механизации и автоматизации различают четыре способа проектирования: ручной, механизированный, автоматизированный и автоматический.

При ручном способе вся нагрузка по проектированию ложится на проектировщика. Степень использования ЦВМ практически нулевая. Основой проектирования в этом случае являются домашние методы, которые в большинстве своём на расчетном уровне не позволяют получить достаточно адекватные реальному устройству решения в короткие сроки.

Механизированный способ проектирования предполагает выполнение на ЦВМ ряда отдельных сложных расчетов. Уровень механизации в этом случае зависит от степени формализации и алгоритмизации методов проектирования, от наличия соответствующего программного обеспечения, от технического оснащения вычислительного комплекса и от степени подготовленности специалиста к машинному проектированию.

При автоматизированном способе проектирования предполагается, что значительная часть инициирующих, управляющих, вычислительных и других операций процесса проектирования выполняется ЦВМ и периферийными устройствами. Однако в данном случае существенна роль и проектировщика, особенно в решении непроцедурных задач, например просмотр альтернативных вариантов и выбор из них оптимального в некотором смысле, оценка промежуточных и окончательных результатов, управление общей стратегией проектирования. Основой данного способа проектирования является наличие диалоговой человеко-машинной системы проектирования, которая получила гостированное определение "Система автоматизированного проектирования" (САПР). До-

ля участия проектировщика в САПР определяется степенью формализации процесса проектирования. По мере достижения успехов в данной области САПР всё более будет приобретать свойства системы автоматического проектирования. Однако в учебных САПР, наоборот, взаимосвязь проектировщика и ЦВМ будет всё более развиваться.

Автоматический способ проектирования в настоящее время реализован лишь в отношении некоторых этапов проектирования в рамках САПР.

Общие сведения о САПР

В соответствии с ГОСТ 2.3501.0 - 79 САПР представляет собой организационно-техническую систему, состоящую из комплекса средств автоматизации проектирования, взаимосвязанного с подразделениями проектной организации, и выполняющую автоматизированное проектирование.

Целью создания САПР является повышение качества и технико-экономического уровня проектируемых объектов, а также производительности труда, сокращение сроков, уменьшение стоимости и трудоемкости проектирования.

Для создания САПР необходимы: совершенствование проектирования на основе применения математических методов и средств вычислительной техники; автоматизация процесса поиска, обработки и выдачи информации; использование методов оптимизации и многовариантного проектирования; применение эффективных, адекватно отражающих существенные особенности математических моделей проектируемых объектов, комплектующих изделий и материалов; создание достаточно полных и единых банков систематизированных данных, имеющих сведения справочного характера, необходимые для автоматизированного проектирования объектов; повышение качества выходной документации и доли творческого труда проектировщиков; подготовка и переподготовка специалистов; унификация и стандартизация методов проектирования; взаимодействие с автоматизированными системами различного уровня и функционального назначения.

Составными частями САПР являются подсистемы, обладающие всеми свойствами систем и создаваемые как самостоятельные системы, которые подразделяются на проектирующие и обслуживающие. К проектирующим относят подсистемы, выполняющие проектные процедуры и операции, например, подсистема проектирования приборных следящих си-

стем, подсистема проектирования силовых следящих систем, подсистема проектирования промышленных регуляторов.

К обслуживающим относят подсистемы, предназначенные для обеспечения работоспособности проектирующих подсистем, например, подсистема графического отображения объектов проектирования, подсистема документирования, подсистема информационного поиска.

Подсистемы состоят из компонентов САПР, выполняющих определенные функции в подсистемах, например, лингвистическое обеспечение – языки проектирования, терминология; математическое обеспечение – методы, математические модели, алгоритмы; программное обеспечение – документы с текстами программ, программы на машинных носителях и эксплуатационные документы; техническое обеспечение – ЦВМ и организационная техника, средства передачи данных, измерительные и другие устройства; информационное обеспечение – документы, содержащие описание стандартных проектных процедур, типовых решений, комплектующих изделий, материалов и другие данные, а также файлы и блоки данных на машинных носителях с записью указанных документов.

Классификация САПР осуществляется на основании следующих признаков: тип объекта проектирования; сложность объекта проектирования; уровень автоматизации проектирования; комплексность автоматизации проектирования; характер выпускаемых проектных документов; количество уровней в структуре технического обеспечения.

По типу объектов проектирования САПР подразделяются на девять групп: 1 – САПР изделий машиностроения и приборостроения; 2 – САПР технологических процессов в машиностроении и приборостроении; 3 – САПР объектов строительства; 4 – САПР организационных систем; 5–9 – резерв.

По сложности объектов проектирования выделяют пять групп САПР: 1 – САПР простых объектов (число составных элементов до 10^2); 2 – САПР объектов средней сложности (свыше 10^2 до 10^3 элементов); 3 – САПР сложных объектов (свыше 10^3 до 10^4 элементов); 4 – САПР очень сложных объектов (свыше 10^4 до 10^6 элементов); 5 – САПР объектов очень высокой сложности (свыше 10^6 элементов).

По уровню автоматизации САПР делят на три группы: I – САПР с низким уровнем автоматизации (автоматизировано 25% от общего числа проектных процедур); 2 – САПР среднего уровня автоматизации (автоматизировано от 25 до 50% всех проектных процедур); 3 – вы-

сокоавтоматизированная САПР (автоматизировано выше 50% от общего количества проектных процедур с обязательным применением методов многовариантного оптимального проектирования).

По признаку комплексности автоматизации проектирования в зависимости от числа этапов проектирования объектов, выполняемых системой, САПР делятся на I - одноэтапные; 2 - многоэтапные (выполняется часть этапов); 3 - комплексные (выполняются все этапы).

По характеру выпускаемых проектных документов выделяют девять САПР: 1 - САПР текстовых документов (тексты на бумажной ленте или листе); 2 - САПР текстовых и графических документов (текстовые и графические документы на бумажной ленте или листе); 3 - САПР документов на машинных носителях (на перфоленте, перфокартах, магнитных лентах, дисках и барабанах); 4 - САПР документов на фотоносителях (на микрофильмах, микрофишах, фотошаблонах и т.п.); 5 - САПР документов на двух типах носителей данных; 6 - САПР документов на всех типах носителей данных; 7-9 - резерв.

По количеству выпускаемых проектных документов за год в пересчете на II формат выделяют девять САПР: I - САПР малой производительности (10^5 проектных документов); 2 - САПР средней производительности (от 10^5 до 10^6 проектных документов); 3 - САПР высокой производительности (свыше 10^6 проектных документов); 4-9 - резерв. Возможны и другие количественные характеристики, определяющие производительность системы, например, в кбайтах, в условных единицах и т.п.

По количеству уровней в структуре технического обеспечения деление САПР следующее: I - одноуровневая САПР (система, построенная на основе ЭВМ среднего или высокого класса со штатным набором периферийных устройств, который в необходимых случаях может быть дополнен некоторыми средствами обработки графической информации); 2 - двухуровневая САПР (система, построенная на основе ЭВМ среднего или высокого класса и одного или нескольких автоматизированных мест (АМ), включающих в себя миниЭВМ); 3 - трёхуровневая САПР (система, построенная на основе ЭВМ высокого класса, одного или нескольких АМ и периферийного программно-управляемого оборудования); 4-9 - резерв.

В настоящее время широким фронтом ведутся работы в области теории и практики САПР САУ. При этом большое внимание уделяется разработке пакетов высокоеффективных прикладных программ и проб-

лемно-ориентированных языков, позволяющих формулировать задачи в удобном виде с использованием принятых в теории САУ терминов, обозначений и форм математических моделей объектов управления.

Глава 2. ФОРМЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ

I. Понятие математической модели

Под математической моделью объекта или системы понимают математическую взаимосвязь между его переменными координатами Y_i , управляющими U_i и возмущающими f_i воздействиями.

Отдельные объекты и системы в целом по своей природе имеют непрерывные или дискретные процессы. Вместе с тем математические модели как в первом, так и во втором случаях могут быть представлены либо в непрерывном, либо в дискретном виде. Так, таблица с данными процесса непрерывного объекта является одной из форм дискретной математической модели, а сплошной график дискретного процесса характеризует его непрерывную математическую модель.

Наиболее ёмкой является математическая модель адекватная по своей форме реальному объекту или системе.

Форма математической модели в каждом конкретном случае во многом определяется наличием технических средств по обработке информационных потоков. Исторически сложилось так, что в настоящее время по уровню точности, логическим возможностям, автоматизации и надежности ЦВМ не имеет себе равных. По принципу работы ЦВМ оперирует дискретными математическими моделями в форме программ. В этих условиях степень адекватности рабочих математических моделей непрерывных объектов снижается, и в ряде случаев возникает существенная разница между естественной и алгоритмической моделями.

2. Математические модели непрерывных объектов и систем

Объекты и системы, в которых в каждый момент времени можно измерить или зафиксировать их фазовые координаты, относят к непрерывным.

В достаточно общем случае математическая модель непрерывного объекта или системы может быть представлена в виде

$$F(Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n)}, X, \lambda, t) = 0, \quad (2.1)$$

где при $t=0$ $Y(0), Y^{(1)}(0), \dots, Y^{(n-1)}(0)$ – векторы начальных ус-

ловий – случайные величины; $t \in [0, T]$; F – вещественная нелинейная вектор-функция своих аргументов

$$F = (F_1, \dots, F_{n_1}); \quad (2.2)$$

$y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ – векторы из фазовых координат и их производных – случайные функции времени; $X(X_1, \dots, X_{n_2})$ – векторы возмущающих f и управляющих U воздействий на систему – случайные функции времени; $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n_3})$ – векторы параметров системы – случайные величины.

Кроме того, задаются вероятностные характеристики случайных функций $X_i(t)$ и случайных величин $y_{i_0}, \lambda_i, \xi_x[X_i(t)], \xi_y[y_{i_0}], \xi[\lambda_i]$, которые в частных случаях выражают математические ожидания, дисперсии, плотности распределения вероятности процессов $X(t)$ и величин y_0, λ .

Математическая модель, представленная в форме (2.1), кроме переменных, идентификатора функций, списка параметров и общей топологии, не содержит иной информации. В связи с этим рассмотрим более конкретные формы математических моделей объектов и систем. Как показано в [7], для достаточно широкого круга объектов и систем их математические модели можно представить в форме уравнений "вход–выход" и в форме уравнений состояния.

Модели в форме "вход–выход"

Математическую модель линейного стационарного объекта с одним входом и одним выходом можно представить в виде уравнения

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j X^{(j)}(t), \quad (2.3)$$

где $y^{(j)}(t), X^{(j)}(t)$ – j -я производная выходной и входной величин соответственно; n, m – наивысший порядок выходного и входного сигналов; a_j, b_j – постоянные коэффициенты, которые совместно с n и m характеризуют структуру и параметры математической модели.

Применяя к (2.3) операторное преобразование Лапласа [5], математическую модель можно записать в форме операторного уравнения

$$A(p)y(p) = \sum_{j=1}^n A_{0j}(p)y^{(j-1)}(0) + B(p)X(p) - \sum_{j=1}^m B_{0j}(p)X^{(j-1)}(0), \quad (2.4)$$

где p – оператор преобразования Лапласа; $y(p), X(p)$ – операторные

изображения выхода и входа при нулевых начальных условиях; $y^{(j-1)}(0)$, $x^{(j-1)}(0)$ – начальные значения соответствующих производных выхода и входа; $A(p)$, $A_{0j}(p)$, $B(p)$, $B_{0j}(p)$ – операторные полиномы, которые соответственно равны:

$$A(p) = \sum_{j=0}^n a_j p^j; \quad A_{0j}(p) = \sum_{\ell=j}^n a_\ell p^{\ell-j}; \quad (2.5)$$

$$B(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j; \quad B_{0j}(p) = \sum_{\ell=j}^m b_\ell p^{\ell-j}. \quad (2.6)$$

Разделив левую и правую части (2.4) на характеристический полином $\Lambda(p)$, получим математическую модель в форме изображения выходной величины

$$y(p) = \sum_{j=1}^n K_{yj}(p) y^{(j-1)}(0) + K(p) x(p) - \sum_{j=1}^m K_{xj}(p) x^{(j-1)}(0), \quad (2.7)$$

где $K_{yj}(p)$, $K_{xj}(p)$ – передаточные функции по каналам воздействия ненулевых начальных условий выхода и входа; $K(p)$ – передаточная функция объекта при нулевых начальных условиях.

Поскольку к линейным системам применим принцип суперпозиции, реакцию системы на каждое конкретное воздействие можно рассматривать раздельно. Учитывая это свойство линейных систем, можно осуществить декомпозицию математической модели, выделив её составляющие по каждому воздействию. С математическими моделями в форме передаточных функций тесно связаны математические модели в форме частотных функций, структурных схем и типовых звеньев, которые в совокупности определили развитие классической теории автоматического управления, ориентированной преимущественно на ручные методы проектирования.

В связи с трудоёмкостью неавтоматизированных методов расчета систем особенно большой размерности математические модели, как правило, урезаются. Так, передаточная функция в классической теории рассматривается при нулевых начальных условиях, т.е. в виде $K(p) = B(p)/A(p)$. При этом с целью использования наиболее эффективных методов, основанных на логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристиках (ЛАХ и ЛФХ), передаточная и соответствующая частотная функции представляются в виде произведения передаточных и частотных функций типовых динамических звеньев, что в форме структурных схем соответствует последовательному соединению звеньев. Переход от $K(p)$ к типовым динамическим звеньям

осуществляется по полюсам и нулям $K(p)$, т.е. полиномы $A(p)$ и $B(p)$ раскладываются на простейшие множители, например, вида

$$A(p) = p^2 \prod_{i=1}^{\ell} (T_i p + 1) \cdot \prod_{j=1}^y (T_j^2 p^2 + 2\rho_j T_j p + 1); \quad (2.8)$$

$$\ell + y = n;$$

$$B(p) = K \prod_{i=1}^m (\tau_i p + 1), \quad (2.9)$$

где ℓ – порядок астатизма, соответствующий числу интегрирующих звеньев; T_i , T_j , τ_i – постоянные времени звеньев; ℓ – число инерционных звеньев первого порядка; y – число колебательных звеньев; m – число реальных дифференцирующих звеньев; n – общий порядок системы; ρ – коэффициент демпфирования.

Достоинством таких моделей является то, что каждое динамическое звено или их совокупность соответствует определенному реальному элементу системы. При этом структурная и функциональная схемы по топологии практически совпадают.

Математические модели в форме типовых динамических звеньев хорошо вписываются в идеологию проектирования методами ЛАХ и ЛФХ.

Модели в форме уравнений состояния

Математическая модель объекта или системы в форме уравнений состояния "пространства состояний" обычно записывается в векторно-матричной форме

$$\dot{Y} = AY + BU + CX, \quad (2.10)$$

где Y – n -мерный вектор-столбец переменных состояния; U – m -мерный вектор-столбец управления; X – ℓ -мерный вектор-столбец возмущений; $A(n \times n)$, $B(n \times m)$, $C(n \times \ell)$ – матрицы коэффициентов указанных в скобках размерностей.

Матричное уравнение (2.10) соответствует компактной записи дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши.

В качестве компонент вектора состояния могут быть приняты одна из переменных Y_1 и $n-1$ её производных, например, если в качестве Y_1 принять выходную величину объекта $Y_{\text{вых}}$, то для Y_1 можно написать выражение

$$Y_1 = d^{(i-1)} Y_{\text{вых}} / dt^{i-1}. \quad (2.11)$$

Матрица A , являющаяся сопровождающей матрицей характеристического полинома $\Lambda(p)$, имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

В качестве компонент вектора управления U могут быть приняты:

$$u_i = d^{(i-1)} u_i / dt^{i-1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, m_1; \quad (2.13)$$

$$u_i = d^{(i-m_{i-1})} u_i / dt^{i-m_{i-1}} \quad \text{при } i = m_i + 1, m_i + 2, \dots, m_2; \quad (2.14)$$

.....

$$u_i = d^{(i-m_{k-1}-1)} u_k / dt^{i-m_{k-1}-1} \quad \text{при } i = m_{k-1} + 1, m_{k-1} + 2, \dots, m. \quad (2.15)$$

В этом случае матрица B будет представлена в виде

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{01} & b_{11} & \cdots & b_{m_1 1} & b_{02} & b_{12} & \cdots & b_{m_2 2} & \cdots & b_{0k} & b_{1k} \cdots b_{m_k k} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Аналогично компонентам вектора U могут быть записаны и компоненты вектора возмущающих воздействий X :

$$x_i = d^{(i-1)} x_i / dt^{i-1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, \ell_1; \quad (2.17)$$

$$x_i = d^{(\ell - \ell_{i-1})} x_i / dt^{\ell - \ell_{i-1}} \quad \text{при } i = \ell_i + 1, \ell_i + 2, \dots, \ell_2; \quad (2.18)$$

.....

$$x_i = d^{(i-m_{k-1}-1)} x_k / dt^{i-m_{k-1}-1} \quad \text{при } i = \ell_{k-1} + 1, \ell_{k-1} + 2, \dots, \ell. \quad (2.19)$$

Отсюда матрица коэффициентов управления C записется в виде

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ C_{01} & C_{11} \cdots C_{\ell_1 1} & \cdots & C_{0K} & C_{1K} \cdots C_{\ell_K K} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

В структурном отношении математическая модель объекта (2.10) при принятых формах векторов U , U , X и матриц A , B , C представляет собой последовательное соединение интеграторов, выходы с которых умножаются на соответствующие коэффициенты a_i и подаются на вход цепочки интеграторов. Кроме того, на вход данной цепочки интеграторов подаются сигналы векторов управления и возмущения, также умноженные предварительно на свои коэффициенты b_i и c_i .

Модели в канонической матричной форме уравнений состояния

Математическая модель в форме нормальных уравнений Коши оказывается во многих случаях недостаточно удобной. Так, при большой размерности модели и ограниченной оперативной памяти ЦВМ может возникнуть необходимость в декомпозиции математической модели не только в отношении вынужденных движений, но и собственных. В этом случае структуру модели целесообразно представить в параллельном виде. Такое преобразование модели в нормальной форме Коши может быть выполнено путем диагонализации матрицы A с помощью матрицы Вандермонда [6]:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

где λ_i – различные вещественные собственные числа матрицы A (корни характеристического полинома).

В результате векторно-матричное уравнение (2.10) преобразуется в эквивалентное векторно-матричное уравнение вида

$$\ddot{Y}^* = \Lambda Y^* + B^* U + C^* X, \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } \mathcal{B}Y^* &= Y; \quad \Lambda = \mathcal{B}^{-1} A \mathcal{B} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n); \\ B^* &= \mathcal{B}B; \quad C^* = \mathcal{B}^{-1} C. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

В общем случае, когда среди собственных чисел матрицы A имеются кратные, каноническое преобразование может быть выполнено путем перехода к блочно-диагональной матрице Жордана.

Вектор состояния Y^* в канонической форме математической модели имеет фиктивный характер. Однако сумма компонент вектора Y^* равна выходной переменной объекта, т.е.

$$Y_{\text{вых}} = \sum_{i=1}^n Y_i^*. \quad (2.24)$$

Модели в форме матричных передаточных и частотных функций

Применяя к (2.10) и (2.22) преобразования Лапласа, можно написать матричные операторные уравнения соответственно:

$$(PE - A)Y(p) = Y(0) + BU(p) + CX(p); \quad (2.25)$$

$$(PE - A)Y^*(p) = Y^*(0) + B^*U(p) + C^*X(p), \quad (2.26)$$

где $Y(0)$ – вектор начальных условий; E – единичная матрица.

Для каждой составляющей правой части этих уравнений могут быть написаны матричные передаточные функции, например, по управляемому воздействию для случая нормальной формы Коши имеем

$$K_u(p) = B/(PE - A) = (PE - A)^{-1}B. \quad (2.27)$$

Заменяя оператор p на оператор $j\omega$, получим выражение для частотной функции

$$K_u(j\omega) = (j\omega E - A)^{-1}B. \quad (2.28)$$

Выражения (2.27) и (2.28) определяют векторы передаточных и частотных функций, каждая компонента которых соответствует определенной компоненте вектора U , определяемой через производные по времени от соответствующего управляющего воздействия.

3. Математические модели объектов и систем с дискретным управлением

Модели в форме разностных уравнений

При математическом описании объектов с дискретным управлением рассматриваются соотношения между решетчатыми функциями

$$Y[NT] = F(U[NT], X[NT]), \quad (2.29)$$

где Т - период цикла, определяющий квантование решетчатых функций $U[NT]$, $U[NT]$, $X[NT]$ по времени. Кроме того, для дискретных систем характерно и квантование по уровням ΔU , ΔU , ΔX .

Уравнение (2.29) является разностным уравнением, получаемым на основании исходного дифференциального уравнения путём квантования по времени и уровню входных и выходных сигналов.

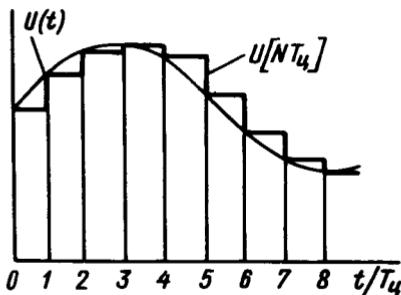


Рис. 6. Особенность работы экстраполатора нулевого порядка

Переход от дифференциального уравнения к разностному (решетчатому) может быть выполнен различными способами.

В случае объектов невысокого порядка разностное уравнение можно достаточно легко получить путем непосредственного интегрирования дифференциального уравнения на интервале $0 \leq t \leq nT_4$, где n - порядок объекта. Так, пусть объект описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy}{dt} + y = K U(t), \quad (2.30)$$

где T , K - постоянная времени и коэффициент передачи объекта.

Прежде всего необходимо входной сигнал представить в квантованном по времени и уровню виде. Обычно квантование по уровню осуществляется в моменты времени $t = 0 \cdot T_4, 1 \cdot T_4, \dots, NT_4, \dots$, что определяется принципом работы дискретных систем, для которых характерно дискретное поступление информационных потоков. В промежутках между циклами реальная информация об управляющих сигналах отсутствует и заменяется предполагаемой, которая реализуется посредством экстраполаторов и других так называемых формирующих элементов. Чаще всего используется экстраполатор нулевого порядка, особенность работы которого поясняется графиками на рис.6, откуда видно, что непрерывная времененная зависимость $U(t)$ заменяется последовательностью прямоугольных импульсов. С учетом этого для N -го цикла уравнение (2.30) запишем в виде

$$T \frac{dy}{dt} + y = K U[NT_4], \quad NT_4 \leq t \leq (N+1)T_4. \quad (2.31)$$

Поскольку правая часть уравнения представляет собой управляющее воздействие типа единичного скачка, то получим

$$y(t) = y[NT_4] e^{-\frac{t-NT_4}{T}} + K U[NT_4] (1 - e^{-\frac{t-NT_4}{T}}), \quad (2.32)$$

$$NT_4 \leq t \leq (N+1)T_4.$$

Полагая $t = (N+1)T_4$, будем иметь искомое разностное уравнение

$$y[(N+1)T_4] = y[NT_4] e^{-T_4/T} + K U[NT_4] (1 - e^{-T_4/T}). \quad (2.33)$$

Учитывая, что $T_4 = \text{const}$, при записи разностного уравнения фиксируют только порядковый номер цикла

$$y[N+1] = y[N] e^{-\frac{T_4}{T}} + K U[N] (1 - e^{-\frac{T_4}{T}}). \quad (2.34)$$

В практике формирования дискретных математических моделей на основе непрерывных моделей в виде дифференциальных уравнений и передаточных функций в форме "вход-выход" используют следующий алгоритм:

- 1) на основании дифференциального уравнения записывают передаточную функцию непрерывной части $K_p(p)$;
- 2) по заданному экстраполатору с передаточной функцией $K_e(p)$

получают передаточную функцию приведенной непрерывной части в виде

$$K_n(p) = K_s(p) K_H(p); \quad (2.35)$$

3) передаточную функцию $K_n(p)$ раскладывают на сумму простейших дробей в виде типовых передаточных функций

$$K_n(p) = \sum_{i=1}^n K_i(p); \quad (2.36)$$

4) на основании таблиц соответствия p - и z -изображений получают $K(z)$ в виде

$$K(z) = \sum_{i=1}^n K_i(z); \quad (2.37)$$

5) после приведения составляющих $K(z)$ к общему знаменателю записывают окончательное выражение

$$K(z) = B(z)/A(z); \quad (2.38)$$

6) по передаточной функции формируют операторное и соответствующее разностное уравнения.

Пример. Пусть непрерывная часть модели задана передаточной функцией инерционного звена

$$K(p) = K/(Tp+1),$$

а формирующее звено представляет собой экстраполятор нулевого порядка с передаточной функцией

$$K_s(p) = (1 - e^{-T_u p})/p.$$

Тогда передаточная функция приведенной непрерывной части будет

$$K_n(p) = K(1 - e^{-T_u p})/(p(Tp+1)).$$

Раскладывая передаточную функцию на простейшие дроби, получим

$$K_n(p) = K \left[1/p - 1/(p+1/T) - e^{-T_u p}/p + e^{-T_u p}/(p+1/T) \right].$$

На основании таблиц соответствия p - и z -изображений напишем

$$K(z) = K \left[z/(z-1) - z/(z - e^{-T_u/T}) - 1/(z-1) + 1/(z - e^{-T_u/T}) \right].$$

Приводя к общему знаменателю, преобразуем $K(z)$ к виду

$$K(z) = K(1 - e^{-T_u/T}) / (z - e^{-T_u/T}).$$

По передаточной функции запишем операторное и разностное уравнения:

$$(z - e^{-T_u/T}) Y(z) = K(1 - e^{-T_u/T}) U(z);$$

$$y[N+1] = y[N] e^{-T_u/T} + K(1 - e^{-T_u/T}) u[N].$$

Данное разностное уравнение совпадает с полученным выше на основании непосредственного интегрирования дифференциального уравнения.

Модели в форме уравнений в конечных разностях

Математическая модель объекта с дискретным управлением в форме конечных разностей может быть записана в виде

$$F(N, y[N], \Delta y[N], \dots, \Delta^n y[N]), \quad (2.39)$$

где $y[N]$, $\Delta y[N]$, ..., $\Delta^n y[N]$ – конечные разности нулевого, первого, ..., n -го порядков, под которыми понимаются выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y[N] &= y[N+1] - y[N]; \\ \Delta^2 y[N] &= \Delta y[N+1] - \Delta y[N]; \\ \dots & \dots \\ \Delta^n y[N] &= \Delta^{n-1} y[N+1] - \Delta^{n-1} y[N]. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Раскрывая эти выражения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 y[N] &= y[N+2] - 2y[N+1] + y[N]; \\ \Delta^3 y[N] &= y[N+3] - 3y[N+2] + 3y[N+1] + y[N]; \\ \dots & \dots \\ \Delta^n y[N] &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \frac{n!}{i!(n-i)!} y[N+i]. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Необходимо заметить, что, разделив конечную разность i -го порядка на период цикла T_4 в степени i и устремив последний к нулю, в пределе получим i -ю производную искомой функции, т.е.

$$\frac{d^i y[N]}{dt^i} = \lim_{T_4 \rightarrow 0} \frac{\Delta^i y[N]}{T_4^i}, \quad (2.42)$$

а при конечном значении T_4 – приближённое значение данной производной

$$\frac{d^i y[N]}{dt^i} \approx \frac{\Delta^i y[N]}{T_4^i}. \quad (2.43)$$

Из выражений (2.39) – (2.43) следует тесная связь между математическими моделями в форме разностных уравнений, в конечных разностях и дифференциальных уравнений.

Пример. В качестве исходной рассмотрим математическую модель в форме разностного уравнения (2.34). Добавляя и вычитая $y[N]$, получим

$$y[N+1] - y[N] + y[N] - y[N]e^{-T_4/T} = K(1 - e^{-T_4/T}) u[N].$$

Учитывая выражение (2.40), напишем уравнение в конечных разностях

$$\text{или } \Delta y[N] + (1 - e^{-T_u/T}) y[N] = K(1 - e^{-T_u/T}) u[N],$$

$$\Delta y[N]/(1 - e^{-T_u/T}) + y[N] = K u[N].$$

Разделив и умножив первую составляющую левой части на T_u , получим

$$\frac{T}{1 - e^{-T_u/T}} \frac{\Delta y[N]}{T_u} + y[N] = K u[N].$$

При $T_u \rightarrow 0$, в пределе получим дифференциальное уравнение

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K u(t).$$

Математические модели объектов и систем с дискретным управлением в форме уравнений состояния

Математическая модель в форме уравнений состояния для объектов и систем с дискретным управлением может быть получена путем непосредственного интегрирования (2.10) или (2.22). Так, решая (2.10), можно написать

$$y = e^{A(t-t_o)} y(t_o) + \int_{t_o}^t e^{A(t-\tau)} [B u(\tau) + C x(\tau)] d\tau. \quad (2.44)$$

При $t = NT_u$ и $t = (N+1)T_u$ будем соответственно иметь:

$$y[NT_u] = e^{A(NT_u-t_o)} y(t_o) + \int_{t_o}^{NT_u} e^{A(NT_u-\tau)} [B u(\tau) + C x(\tau)] d\tau; \quad (2.45)$$

$$y[(N+1)T_u] = e^{A(NT_u+T_u-t_o)} y(t_o) + \int_{t_o}^{(N+1)T_u} e^{A(NT_u+T_u-\tau)} [B u(\tau) + C x(\tau)] d\tau. \quad (2.46)$$

Сравнивая эти уравнения, получим

$$y[(N+1)T_u] = e^{AT_u} y[NT_u] + \int_{NT_u}^{(N+1)T_u} e^{A(NT_u+T_u-\tau)} [B u(\tau) + C x(\tau)] d\tau. \quad (2.47)$$

Если $u(\tau)$ и $x(\tau)$ представить в квантованном по принципу экстраполятора нулевого порядка виде, то (2.47) можно существенно упростить

$$y[(N+1)T_u] = e^{AT_u} y[NT_u] + (B u[NT_u] + C x[NT_u]) \int_{NT_u}^{A(NT_u+T_u-\tau)} d\tau. \quad (2.48)$$

Глава 3. АЛГОРИТМЫ МАШИННО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ МЕТОДОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

I. Граф-схема алгоритма проектирования следящих систем

При использовании ЦВМ для проектирования различных устройств, в том числе и следящих систем, исключительно важное значение приобретает формализация проектных процедур и их взаимная связь, которая наиболее наглядно проявляется на языке граф-схем. Последние оказываются полезными при любом способе проектирования от ручного до автоматического. В случае ручного способа проектирования граф-схема позволяет четко представить объём и последовательность расчётов, при частично механизированном способе – определиться в выборе соответствующих машинных программ с ориентацией на формирование в последующем математического обеспечения подсистемы САПР следящих систем.

Возможный вариант укрупнённой граф-схемы алгоритма проектирования следящей системы представлен на рис.7, из которого видно, что алгоритм проектирования состоит из значительного числа разного рода процедур, включая и логические. Наличие последних определяет итерационный характер процесса проектирования со сложной иерархией циклов. На граф-схеме показана только часть логических условий, которая отражает наиболее характерные ветвления процесса проектирования. В действительности по окончании каждой процедуры возникает вопрос: удовлетворяет ли решение поставленным целям, каким путем достигнуть желаемого? Чаще всего здесь возникают задачи с низким уровнем формализации, которые требуют для своего разрешения творческого инженерного подхода, базирующегося на общем и техническом кругозоре проектировщика, его опыте и интуиции. Поэтому при ручном и механизированном способах проектирования эти трудности плохо формализуемых задач проходят относительно безболезненно. При автоматизированном способе проектирования в каждом таком случае автоматический режим работы САПР прерывается, ЦВМ сообщает проектировщику определённые сведения и на данном этапе передает ему управление по проектированию до момента получения необходимой директивы.

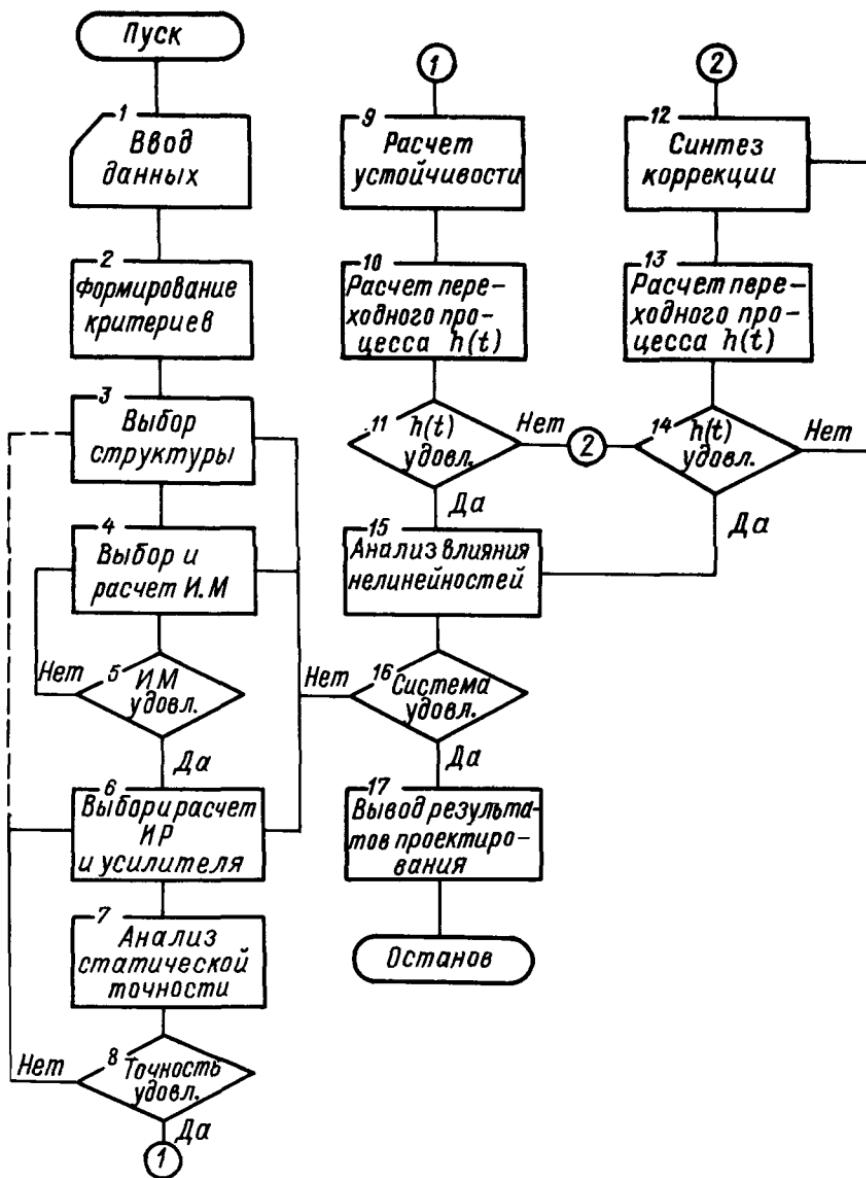


Рис. 7. Укрупнённая граф-схема проектирования следящей системы

2. Алгоритмы расчета и выбора исполнительного механизма

Выбор исполнительного двигателя

Требуемый закон движения объекта управления может быть реализован при условии, что мощность и развиваемый двигателем момент превышают потребляемую мощность и возникающие при движении объекта управления моменты сопротивления, т.е. выполняются условия [II]:

$$\begin{aligned} M_g(t) &\geq M_{Hn}(t) = (\mathcal{J}_g + \mathcal{J}_p + \frac{\mathcal{J}_o}{2i^2}) i \ddot{\alpha}_{\text{вых}}(t) + (|M_{\text{стд}}| + \\ &+ \frac{1}{2i} |M_{\text{ст}}|) \operatorname{Sign} \dot{\alpha}_{\text{вых}}(t) + \frac{1}{2i} K_{\text{вт}} \dot{\alpha}_{\text{вых}}(t) + \\ &+ \frac{1}{2i} K_{\text{ш}} \alpha_{\text{вых}}(t) + \frac{1}{2i} M_{\text{вн}}(t); \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} P_g(t) &\geq P_H(t) = M_{Hn}(t) \dot{\alpha}_g(t) = i M_{Hn}(t) \dot{\alpha}_{\text{вых}}(t) = \\ &= \left[(\mathcal{J}_g + \mathcal{J}_p + \frac{\mathcal{J}_o}{2i^2}) i^2 \ddot{\alpha}_{\text{вых}}(t) + (|M_{\text{стд}}| i + \right. \\ &+ \frac{1}{2i} |M_{\text{ст}}|) \operatorname{Sign} \dot{\alpha}_{\text{вых}}(t) + \frac{1}{2} K_{\text{вт}} \dot{\alpha}_{\text{вых}}(t) + \\ &\left. + \frac{1}{2} K_{\text{ш}} \alpha_{\text{вых}}(t) + \frac{1}{2} M_{\text{вн}}(t) \right] \dot{\alpha}_{\text{вых}}(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $M_g(t)$ – движущий момент двигателя; $M_{Hn}(t)$ – приведённый к валу двигателя момент нагрузки; \mathcal{J}_g , \mathcal{J}_p , \mathcal{J}_o – моменты инерции двигателя, редуктора и приведённый к валу двигателя объекта управления; $\alpha_{\text{вых}}(t)$, $\dot{\alpha}_g(t)$ – углы поворота выходной оси объекта управления и двигателя соответственно; $M_{\text{стд}}$, $M_{\text{ст}}$ – моменты сухого трения двигателя и нагрузки; $K_{\text{вт}}$, $K_{\text{ш}}$ – коэффициенты вязкого трения и шарнирного момента (момента неуровновешенности); $M_{\text{вн}}(t)$ – момент внешней нагрузки; i , i – КПД и передаточное число редуктора.

Из выражений (3.1) и (3.2) следует, что для выбора двигателя и расчета редуктора необходимо знать не только закон движения управляемого объекта и его основные параметры, но и параметры двигателя и редуктора. В связи с этим в условиях автоматизированного проектирования выбор двигателя и расчет редуктора может быть выполнен итерационным методом.

На первом шаге итераций двигатель выбирается по методу требуемой мощности. Для исключения из расчетных алгоритмов параметров

двигателя и редуктора делается допущение, что мощность, развивающаяся двигателем, расходуется поровну на движение объекта управления и на движение инерционных масс и преодоление момента сопротивления самого двигателя. С учетом этого (3.2) записывается в виде

$$P_g(t) \geq 2P_H(t) = \frac{2}{\tau} \left[J_0 \ddot{\alpha}_{\text{вых}}(t) + |M_{ct}| \text{sign} \dot{\alpha}_{\text{вых}}(t) + K_{BT} \dot{\alpha}_{\text{вых}}(t) + K_M \alpha_{\text{вых}}(t) + M_{BH}(t) \right] \dot{\alpha}_{\text{вых}}(t). \quad (3.3)$$

Для предварительного расчета мощности двигателя КПД редуктора принимается $\eta = 0,9 - 0,95$.

Номинальная мощность выбранного двигателя должна удовлетворять условию

$$P_{\text{ном}} \geq 2P_{H\text{ср}}, \quad (3.4)$$

где

$$P_{H\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^T P_H(t) dt; \quad (3.5)$$

T – время цикла работы двигателя.

На последующих шагах итераций выбора исполнительного двигателя рассчитывается редуктор, а затем проверяется правильность выбора двигателя и в случае необходимости выбирается новый двигатель.

Проверка правильности выбора двигателя может быть сделана методом требуемого момента в случае следящих систем приборного типа либо методом эквивалентного момента в случае силовой следящей системы. В первом случае по (3.1) рассчитывается механическая характеристика нагрузки $M_{HP}(\dot{\alpha}_{\text{вых}})$, которая сравнивается с механической характеристикой выбранного двигателя $M_g(\dot{\alpha}_{\text{вых}})$. Если выполняется условие

$$0 \leq M_g(\dot{\alpha}_{\text{вых}}) - M_{HP}(\dot{\alpha}_{\text{вых}}) \leq \varepsilon, \quad (3.6)$$

$$0 \leq \dot{\alpha}_{\text{вых}} \leq \dot{\alpha}_{\text{вых max}},$$

где ε – допустимая ошибка выбора двигателя по моменту, то двигатель выбран правильно. Если данное условие не выполняется, то выбирается новый двигатель с другим номинальным моментом.

В случае силовой следящей системы рассчитывается эквивалентный момент, прикладываемый к двигателю,

$$M_{экв} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T M_{HP}^2(t) dt}, \quad (3.7)$$

который сравнивается с номинальным паспортным моментом двигателя.

Если

$$0 \leq M_H - M_{экв} \leq \varepsilon, \quad (3.8)$$

то двигатель выбран правильно, в противном случае выбирается другой двигатель.

При выборе нового двигателя повторяется процедура расчета редуктора. Если двигатель выбран правильно, то на основе его паспортных данных рассчитываются коэффициент передачи K_g и постоянная времени T_g .

Расчет редуктора

В процессе расчета редуктора должны быть определены передаточное число i , момент инерции J_p , кинематическая схема и люфт.

Передаточное число редуктора должно удовлетворять условию

$$i \leq n_H \lambda_{ск} / \dot{\alpha}_{вых max}, \quad (3.9)$$

где n - номинальная частота вращения двигателя; $\lambda_{ск}$ - коэффициент форсировки по скорости; $\dot{\alpha}_{вых max}$ - максимальное значение частоты вращения двигателя.

Кинематическая схема редуктора (число пар зубчатых колес N) определяется на основании двухстороннего неравенства

$$\frac{\lg i}{\lg i_{j min}} \geq N \geq \frac{\lg i}{\lg i_{j max}}, \quad (3.10)$$

где $i_{j min} = 2$, $i_{j max} = 10 - 12$ - минимальное и максимальное передаточные числа j -й ступени. Величина N округляется до ближайшего большего целого числа, определяемого правым условием. С целью уменьшения момента инерции редуктора рекомендуется передаточные числа первых пар выбирать в диапазоне $i_1 = 2 - 5$, $i_2 = 4 - 8$.

Параметры зубчатых колес редуктора определяются на основании следующих выражений:

$$m = \sqrt[3]{\frac{3070 \cdot 10^6 M}{\sigma \cdot a \cdot z}}; \quad D = m \cdot z; \quad J = \frac{\pi r^2}{32g} \sigma D^4, \quad (3.11)$$

где m - модуль зубчатого колеса, мм; M - наибольший вращающий момент, передаваемый зубчатой парой, Н·м; σ - допустимое напряжение на изгиб материала шестерни, Н/м²; $a = 6 - 20$ - отношение ширины зуба к модулю; D - диаметр начальной окружности, м; z - число зубьев шестерни; J - момент инерции сплошного зубчатого

колеса, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$; γ - удельный вес материала, $\text{кг}/\text{м}^3$; $g = 9,81 \text{ м}/\text{с}^2$ - ускорение силы тяжести; b - ширина зубчатого колеса, м.

Как видно из первого выражения (3.II), модуль m определяется через параметр a , который в свою очередь зависит от модуля. Поэтому расчет модуля имеет явно выраженный итерационный характер.

На основании расчетного модуля выбирается действительный модуль пары зубчатых колес из ряда рекомендованных модулей: $m = 0,3; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 1,0; \dots$. При этом целесообразно все зубчатые колёса редуктора выполнять с одним модулем.

Приведённый к валу двигателя момент инерции редуктора равен

$$J_p = J_1 + \frac{J_2 + J_3}{i_1^2} + \frac{J_4 + J_5}{i_1^2 \cdot i_2^2} + \dots + \frac{J_j + J_{j+1}}{i_1^2 \cdot i_2^2 \cdots i_{j/2}^2} + \dots, \quad (3.I2)$$

где J_j - момент инерции j -й шестерни; $i_{j/2}$ - передаточное число соответствующей пары.

Как следует из (3.I2), величина J_p определяется в основном моментом инерции первых пар шестерен. Поэтому первые от двигателя шестерни выполняются малого диаметра и соответственно с малым передаточным числом.

Расчет люфта редуктора производится в отсчетных делениях, например, тысячных дистанции, градусах и радианах [18]. Прежде всего определяется приведённая к входному валу "цена" одного оборота каждого вала редуктора

$$\mathcal{A}_j = i_j \mathcal{A}_{j-1}, \quad (3.I3)$$

где i_j - передаточное число j -й пары; \mathcal{A}_{j-1} - "цена" оборота ведущего вала; \mathcal{A}_j - "цена" оборота ведомого вала.

"Цена" оборота вала двигателя $\mathcal{A}_0 = 360^\circ$.

Люфт, соответствующий j -й зубчатой паре, равен

$$d_j = K \frac{\mathcal{A}_j}{m \cdot z_{2j}}, \quad (3.I4)$$

где K - коэффициент пропорциональности, зависящий от класса точности и конструкции передачи. В случае второго класса точности и неподвижных центров передачи согласно [18] $K = 0,018$.

Люфт всего редуктора равен сумме люфтов отдельных передач

$$d = \sum_{j=1}^N d_j. \quad (3.I5)$$

Полученная величина люфта редуктора d сравнивается с допустимой

$$d_{\text{ доп}} = 2\beta i \delta_{\text{ см}}, \quad (3.16)$$

где $\delta_{\text{ см}}$ – допустимая статическая ошибка системы; β – весовой коэффициент, учитывающий долю статической ошибки системы от люфта.

Если $d \leq d_{\text{ доп}}$, то редуктор удовлетворяет требованиям точности, иначе необходимо изменить конструкцию редуктора, например, применить разрезные шестерни с люфтобуферным устройством.

Граф-схема алгоритма выбора и расчета исполнительного механизма

Граф-схема алгоритма выбора и расчета исполнительного механизма представлена на рис.8. Схема в целом составлена в соответствии с описанным выше порядком проектирования ИМ. В частных случаях,

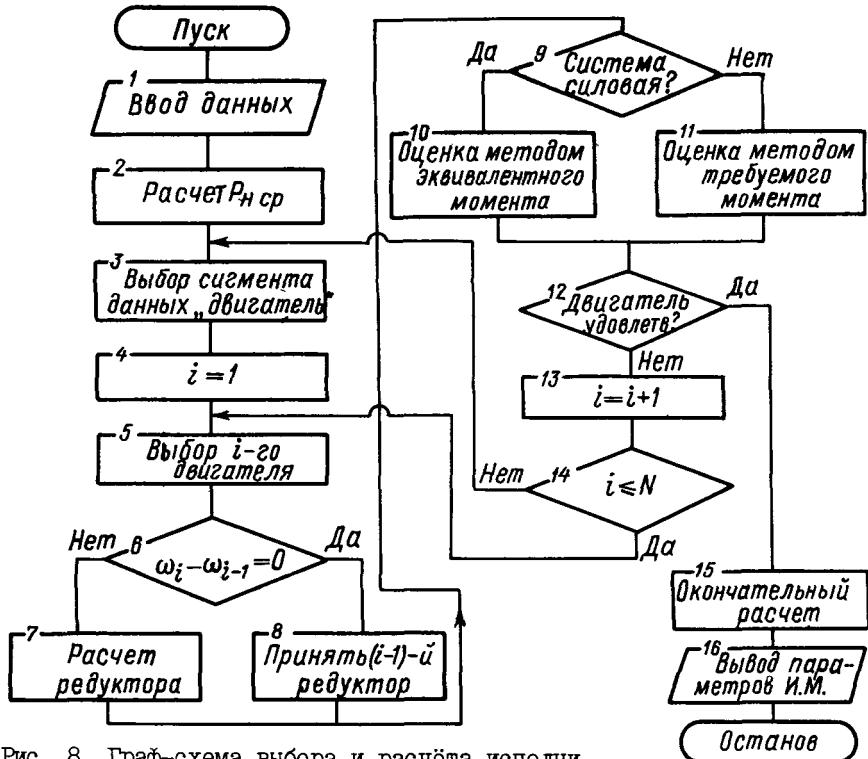


Рис. 8. Граф-схема выбора и расчёта исполнительного механизма следящей системы

обусловленных особенностями отдельных подпрограмм и их согласования между собой, алгоритм нуждается в пояснениях. Так, банк данных "двигатель" разбит на ряд сегментов, содержащих сведения о N двигателях в порядке возрастания их номинальной мощности и момента. Сегмент данных "двигатель" выбирается по методу требуемой мощности, а необходимый двигатель из сегмента - методом последовательного перебора и оценок по требуемому или эквивалентному моментам в зависимости от типа следящей системы. С целью уменьшения машинного времени расчёта редуктора данные о двигателях в сегменте расположены из расчёта постоянства частоты вращения двигателя.

Редуктор рассчитывается заново, если частоты вращения i -го и $(i-1)$ -го двигателей отличаются.

Вводными данными являются тип следящей системы, данные о нагрузке и законе слежения, тип редуктора и другие в зависимости от вектора критериев и структуры следящей системы, которые формируются на начальных этапах с максимальным участием проектировщика.

Выходными параметрами являются тип двигателя, его паспортные данные, коэффициент передачи и постоянная времени, передаточное число, коэффициент передачи и люфт редуктора, число кинематических пар и их передаточные числа, модуль, число зубьев и диаметры делительных окружностей колес.

3. Выбор и расчёт измерителя рассогласования

Исходными данными для проектирования измерителя рассогласования (ИР) являются заданный закон слежения, статическая точность, массогабаритные и другие ограничения. В следящих системах широко применяются потенциометрические, индукционные и цифровые ИР.

Потенциометрические датчики ИР подразделяются на однооборотные и многооборотные, на проволочные и пленочные.

Выходное напряжение ненагруженного потенциометрического ИР равно

$$U_{IP} = K_{IP} \cdot \Delta\alpha, \quad (3.17)$$

где

$$K_{IP} = U_o / \alpha_o; \quad (3.18)$$

U_o - напряжение питания схемы; α_o - полный угол потенциометра.

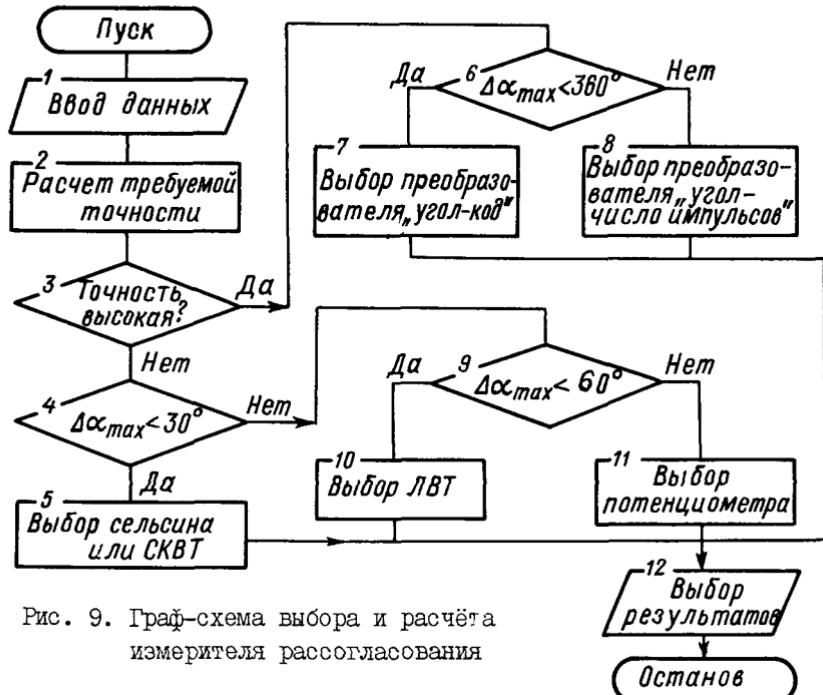
Статическая характеристика потенциометрического ИР на холостом ходу имеет линейный характер. Обычно линейность характеристики ИР обеспечивается за счёт большого сопротивления на входе усилителя.

Если ИР запитан от источника переменного напряжения с частотой

ω , то выходное напряжение может быть представлено в виде

$$U_{ip} = \frac{U_0}{\alpha_0} \Delta \alpha \sin \omega t = U_m \sin \omega t. \quad (3.19)$$

Величина рассогласования $\Delta \alpha$ в этом случае определяется величиной амплитуды U_m , а знак $\Delta \alpha$ – фазой выходного напряжения.



Индукционные ИР строятся, как правило, на сельсинах и вращающихся трансформаторах (ВТ).

В случае выполнения ИР на сельсинах или ВТ в режиме СКВТ (синусно-косинусный ВТ) выходное напряжение равно

$$U_{ip} = U_m \sin \Delta \alpha. \quad (3.20)$$

Статически устойчивая ветвь характеристики таких ИР расположена в диапазоне от -90° до $+90^\circ$. При малых значениях $\Delta \alpha$ характеристика имеет линейный характер

$$U_{ip} \approx K_{ip} \Delta \alpha, \quad (3.21)$$

где $K_{ip} = U_m$, В/рад.

В случае ИР на ВТ в режиме ЛВТ характеристика ИР имеет линейный и устойчивый характер в диапазоне $\pm 60^\circ$.

Цифровые ИР строятся на основе преобразователей "угол - код" (УК) и "угол - число импульсов" (УЧ).

В преобразователях УК дискретность измерения определяется числом $\delta = 360^\circ / 2^n$, где n - число разрядов кода преобразователя.

В преобразователях УЧ угол поворота вала преобразуется в определённое количество электрических импульсов, поступающих на реверсивный счётчик с дешифратором. Максимальный угол рассогласования цифровых ИР на преобразователе УК не превышает 360° , а в случае преобразователя УЧ - зависит от числа элементов счётчика ИР.

Граф-схема выбора и расчёта ИР показана на рис.9. На схеме представлены лишь два уровня логических операций: по требуемой точности и максимальному рассогласованию $\Delta\alpha_{max}$. Детализация выбора ИР с учётом других критериев осуществляется при выполнении подпрограммы выбора ИР конкретного типа. Процедура этих подпрограмм зависит от метода формирования банка данных элементов ИР.

Элементы ИР в списке банка данных могут быть объединены в секторы по величине допустимой частоты вращения, а в пределах каждого сектора - в порядке уменьшения или возрастания массогабаритных параметров, и т.п.

4. Расчёт требуемого коэффициента усиления усилителя

Требуемый коэффициент усиления усилителя K_y обычно рассчитывается двумя способами: по напряжению трогания и по добротности системы. окончательно выбирается наибольший коэффициент усиления.

Напряжение трогания U_{tr} связано с моментом трогания M_{tr} двигателя выражением

$$U_{tr} = M_{tr} / C_m = M_{tr} U_{yn} / M_{pn}, \quad (3.22)$$

где C_m - коэффициент пропорциональности между пусковым моментом и напряжением управления; M_{pn} , U_{yn} - номинальные значения пускового момента и напряжения управления соответственно.

Учитывая, что при достижении $\Delta\alpha$ значения допустимой статической ошибки δ_{st} усилитель должен выдавать на двигатель напряжение, соответствующее моменту трогания, получим

$$K_y = U_{tr} / (\delta_{st} K_{ir}) = M_{tr} U_{yn} / (M_{pn} \delta_{st} K_{ir}), \quad (3.23)$$

где $K_{ир}$ – коэффициент передачи измерителя рассогласования.

В некоторых случаях в паспортных данных на двигатели отсутствуют сведения о моменте и напряжении трогания. Тогда напряжение трогания выбирается в диапазоне от 2 до 10 В [18].

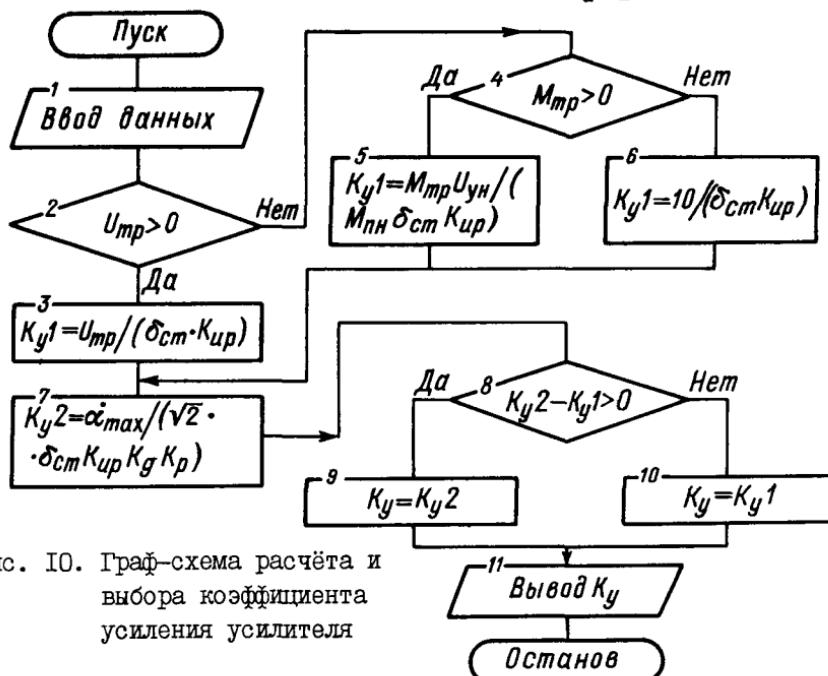


Рис. 10. Граф-схема расчёта и выбора коэффициента усиления усилителя

Добротность представляет собой отношение установившейся скорости изменения выходной величины к установившейся ошибке. Если задано предельное значение скорости изменения выхода, то добротность равна

$$\mathcal{D} = \dot{\alpha}_{max} / \delta_{дин}, \quad (3.24)$$

где $\delta_{дин}$ – динамическая ошибка системы, которая из соображений учёта эквивалентного гармонического закона может быть определена через статическую ошибку по формуле

$$\delta_{дин} = \sqrt{2} \delta_{ст}. \quad (3.25)$$

Разделив добротность на коэффициенты передачи всех звеньев за исключением усилителя, получим коэффициент усиления усилителя

$$K_y = \mathcal{D} / (K_{ир} K_g K_p). \quad (3.26)$$

Граф-схема расчёта и выбора требуемого коэффициента усиления усилителя представлена на рис. I.0.

Входными данными являются U_{tr} , M_{tr} , M_{ph} , U_{yn} , δ_{ct} , K_{ip} , K_g , K_p , α_{max} . Если в паспортных данных отсутствуют сведения о U_{tr} и M_{tr} , то им условно присваиваются нулевые значения, обеспечивающие автоматический выбор нужной ветви расчётовых процедур.

5. Алгоритмы анализа устойчивости линеаризованных систем

Машинно-ориентированные алгоритмы анализа устойчивости систем могут быть построены на основе известных критериев устойчивости, а также на основе либо расчёта корней характеристического полинома, либо расчёта переходного процесса.

Рассмотрим некоторые из этих алгоритмов.

Алгоритм анализа устойчивости по методу Рауса

Согласно данному критерию на основании характеристического уравнения

$$A_0 p^N + A_1 p^{N-1} + \dots + A_{N-1} p + A_N = 0 \quad (3.27)$$

составляется таблица Рауса (табл. I).

Таблица I

Значение	Номер строки	Номер столбца			
		I	2	3
-	1	A_0	A_2	A_4
-	2	A_1	A_3	A_5
$\gamma_0 = A_0/A_1$	3	$C_{13} = A_2 - \gamma_0 A_3$	$C_{23} = A_4 - \gamma_0 A_5$	$C_{33} = A_6 - \gamma_0 A_7$
$\gamma_1 = A_1/C_{13}$	4	$C_{44} = A_3 - \gamma_1 C_{23}$	$C_{24} = A_5 - \gamma_1 C_{33}$	$C_{34} = A_7 - \gamma_1 C_{43}$
.....
$N+1$		$C_{1,N+1} = A_N$	0	0

Граф-схема алгоритма анализа устойчивости методом Рауса представлена на рис. II [12].

В ЦВМ вводится порядок системы N и массив коэффициентов характеристического уравнения. Затем проверяется порядок следящей системы на четность, и в зависимости от результата заполняются пер-

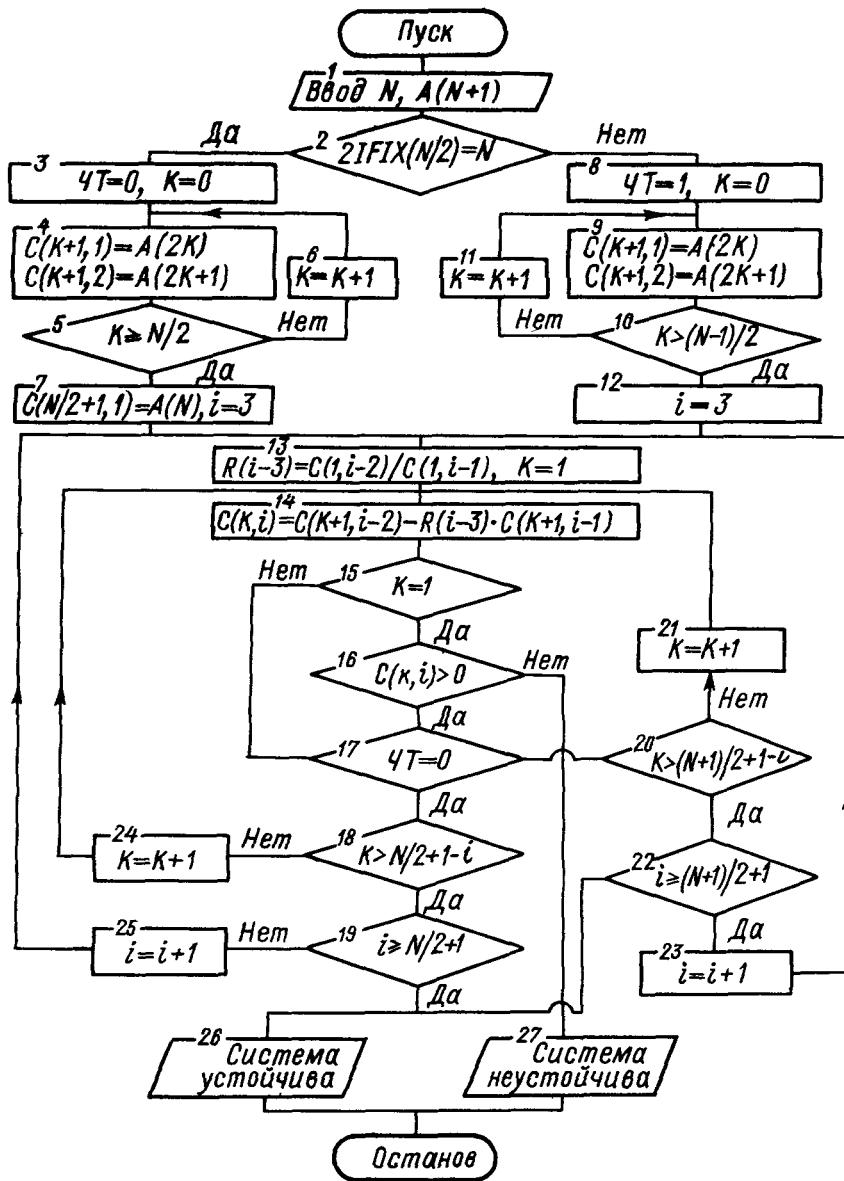


Рис. II. Граф-схема алгоритма анализа
устойчивости методом Раяса

вые две строки таблицы Рауса. Далее заполняются элементы остальных строк таблицы. Устойчивость устанавливается путём проверки положительности значений всех элементов первого столбца. Если хотя бы один из этих элементов отрицателен, то система является неустойчивой.

Алгоритм анализа устойчивости методом ЛАХ и ЛФХ

Метод логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристик (ЛАХ и ЛФХ) анализа устойчивости линейных систем имеет исключительно важное значение. Исключительность данного метода связана с его детальной проработкой в плане исследования и проектирования систем по первому приближению.

Согласно данному методу рассчитываются и строятся две характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} ; \quad (3.28)$$

$$\varphi(\omega) = arctg(Im(\omega) / Re(\omega)) , \quad (3.29)$$

где $Re(\omega)$, $Im(\omega)$ – вещественная и мнимая составляющие частотной функции разомкнутой системы $K(j\omega)$.

Факт устойчивости или неустойчивости системы устанавливается в результате подсчёта точек пересечения фазовой характеристикой линии $\Psi_o = -\pi$ слева от частоты среза ω_c ($L(\omega_c) = 1$). В случае устойчивости разомкнутой системы устойчивость замкнутой системы определяется в зависимости от значения $\Psi(\omega_c)$. Если $\Psi(\omega_c) > -\pi$, система устойчива, иначе – неустойчива. Графически условие устойчивости эквивалентно расположению $\Psi(\omega_c)$ выше линии $\Psi_o = -\pi$. Построение ЛАХ и ЛФХ можно выполнить с помощью стандартных программ, приведённых в [15]. Ряд машинно-ориентированных алгоритмов расчёта ЛАХ и ЛФХ представлен в [13]. Здесь же ограничимся рассмотрением алгоритма расчёта устойчивости следящих систем, в структуре которых нет колебательных звеньев. Вариант граф-схемы алгоритма для данного случая показан на рис.12.

Исходными данными являются следующие параметры: порядок системы N ; порядок числителя передаточной функции M ; массив постоянных T_j ($T(N+M-1)$, упорядоченный на подмассив постоянных времени инерционных звеньев в порядке уменьшения T_j ($1 \leq j \leq N-1$) и на подмассив постоянных времени реальных дифференцирующих звеньев также в порядке их уменьшения ($N \leq j \leq N+M-1$); добротность системы δ ; ко-

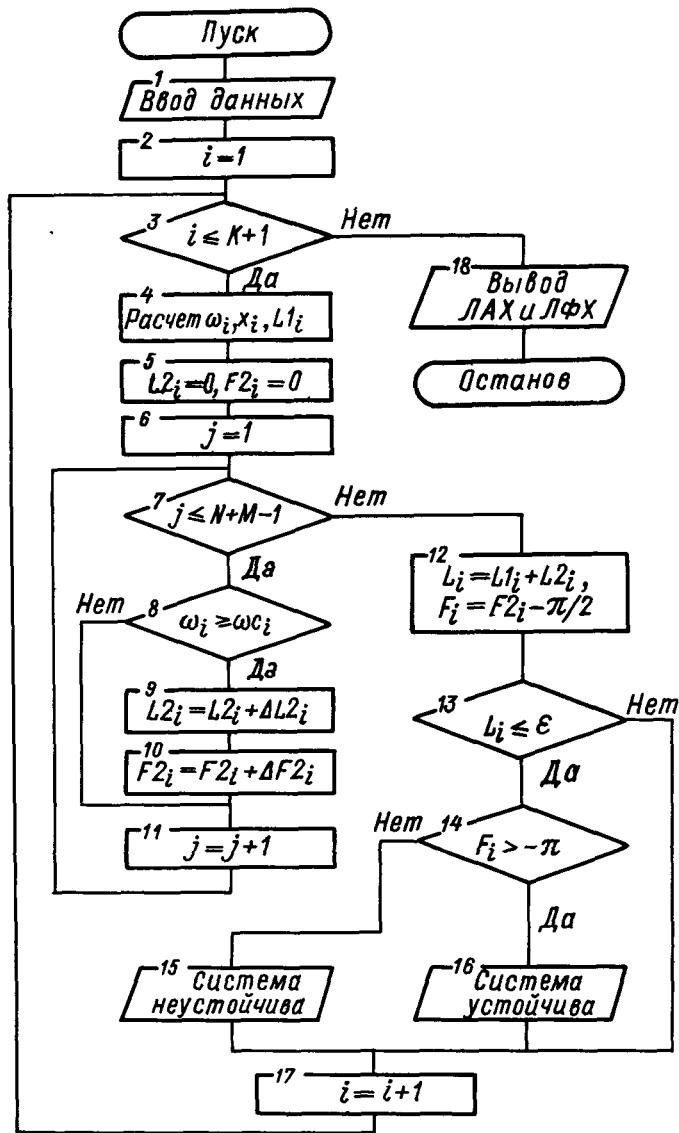


Рис. 12. Граф-схема алгоритма расчёта устойчивости методом ЛАХ

личество выводных точек на графиках ЛАХ и ЛФХ $K+1$; достаточно малая величина отклонения ЛАХ от нуля ϵ , позволяющая зафиксировать факт пересечения ЛАХ логарифмической оси частот; расстояние по логарифмической оси частот от крайних сопрягающих точек A .

Представленная граф-схема имеет укрупненный характер, поэтому отдельные операторы требуют пояснений.

Оператор 4. Абсцисса i -й точки графиков ЛАХ и ЛФХ определяется выражениями:

$$X_i = X_{min} + (i-1)\Delta X; \quad (3.30)$$

$$X_{min} = \lg(1/T_{max}) - A; \quad (3.31)$$

$$\Delta X = (\lg(T_{max}/T_{min}) + 2A)/K, \quad (3.32)$$

где T_{max} , T_{min} – максимальная и минимальная постоянные времени по множеству постоянных времени всех звеньев системы. Абсолютное значение частоты в i -й точке равно

$$\omega = \begin{cases} 1/(10^A T_{max}) & \text{при } i=1; \\ (\omega[i-1]) \cdot 10^{\Delta X} & \text{при } i>1. \end{cases} \quad (3.33)$$

ЛАХ разбита на две составляющие L_1 и L_2 . Выражение для L_1 в i -й точке имеет вид

$$L_1 = 20 \lg \mathcal{D} - 20 X_i \quad (3.34)$$

и определяет изменение ЛАХ интегрирующего звена с добротностью \mathcal{D} .

При детальной разработке граф-схемы в соответствии с алгоритмами (3.30)...(3.34) между операторами I и 3 будет расположен ряд детализированных операторов (выделение T_{min} , T_{max} , расчёт X_{min} , ω , ΔX , $20 \lg \mathcal{D}$).

Оператор 5 присваивает начальные значения переменным L_{2i} и F_{2i} , которые представляют собой суммарные значения ЛАХ и ЛФХ всех инерционных и реальных дифференцирующих звеньев при $\omega = \omega_i$.

Операторы 6...II осуществляют расчёт L_{2i} и F_{2i} методом суммирования составляющих ЛАХ и ЛФХ отдельных инерционных и дифференцирующих звеньев. Приращение ЛФХ при учёте каждого j -го звена равно

$$\Delta F_{2i} = \begin{cases} -\operatorname{arctg}(T_j \omega_i) & \text{при } j \leq N-1; \\ +\operatorname{arctg}(T_j \omega_i) & \text{при } j \geq N. \end{cases} \quad (3.35)$$

Приращение ЛАХ зависит от соотношения между текущей частотой ω_i и частотой сопряжения j -го звена

$$\omega c_j = 1/T_j. \quad (3.36)$$

При $\omega_i \geq \omega c_j$

$$\Delta L2_i = \begin{cases} -20(X_i - \lg(1/T_j)) & \text{при } j \leq N-1; \\ +20(X_i - \lg(1/T_j)) & \text{при } j \geq N. \end{cases} \quad (3.37)$$

При $\omega_i < \omega c_j \quad \Delta L2_i = 0.$ (3.38)

Оператор I2 формирует значения ЛАХ и ЛФХ системы при i -м значении частоты. В результате анализа ЛАХ и ЛФХ операторы I3 и I4 выдают на блоки вывода (I5 и I6) информацию об устойчивости системы.

Оператор I7 осуществляет переход к расчёту $(i+1)$ -х координат.

Оператор I8 выполняет вывод графиков $L(X_i)$ и $F(X_i)$ на графопостроитель. По существу данный оператор представляет стандартную программу, с которой можно ознакомиться в [8].

6. Алгоритмы синтеза желаемой ЛАХ

Желаемая ЛАХ L_* системы строится на основании заданных динамических показателей качества, которые обычно представляют собой одну из следующих пар: максимальное перерегулирование σ и время переходного процесса t_p либо колебательность M и t_p .

Первые показатели обеих пар зависят от запаса устойчивости системы. Чем больше запас устойчивости, тем меньше σ и M . Величины σ и M находят своё отражение в ширине среднечастотной области ЛАХ, проходящей с наклоном -20 дБ/дек. Чем шире указанная область, тем меньше σ и M и выше устойчивость системы.

Частота среза ω_c ЛАХ определяет время переходного процесса. Частота ω_c и ширина средней области L_* обычно рассчитываются с помощью номограмм $\sigma = f(P_{max})$, $t_p = f(P_{max})$, $\hbar = f(P_{max}, P_{min})$ [5]; P_{max} , $P_{min} = 1 - P_{max}$ — максимальное и минимальное значения вещественной частотной характеристики замкнутой системы.

Для целей машинного синтеза L_* указанные номограммы целесообразно представить в аналитическом виде с помощью интерполяционных полиномов.

В области низких и высоких частот L_* по возможности должна совпадать с ЛАХ нескорректированной системы L_{nc} . Совпадение L_* и

L_{nc} в области низких частот гарантирует, что добротность системы не пострадает от её коррекции. Кроме того, на участке согласования низкочастотной и среднечастотной частей L_K не должна заходить в запретную область, обеспечивающую требуемые скорость и ускорение процесса слежения в установленном режиме.

Граница запретной области строится на основании контрольной точки \mathcal{A}_K [2]. Левее точки \mathcal{A}_K граница запретной области проходит с наклоном -20 дБ/дек и, как правило, совпадает с L_{nc} , правее – с наклоном -40 дБ/дек. Учитывая, что точка \mathcal{A}_K расположена на L_{nc} , для определения её координат достаточно рассчитать частоту этой точки. При гармоническом законе слежения ω_K равна частоте задающего входного сигнала.

Если закон слежения задан в виде предельных значений скорости $\dot{\alpha}_{max}$ и ускорения $\ddot{\alpha}_{max}$ слежения, то ω_K приравнивается к частоте эквивалентного гармонического закона, т.е.

$$\omega_K = \omega_3 = \ddot{\alpha}_{max} / \dot{\alpha}_{max}. \quad (3.39)$$

Совпадение L_K и L_{nc} в области высоких частот не является обязательным. Область высоких частот незначительно влияет на устойчивость и качество переходного процесса. Обычно в данной области частот L_K проводят так, чтобы получилась наиболее простая с точки зрения реализации коррекция.

Возможный вариант укрупнённой граф-схемы машинного алгоритма синтеза L_K представлен на рис. I.3. Вводными данными (блок I) являются t_p , $\dot{\alpha}_{max}$, $\ddot{\alpha}_{max}$, ϑ , массив постоянных времени инерционных и дифференцирующих звеньев, $\bar{\sigma}_2$ – заданное допустимое значение σ , $\bar{\sigma}_1$ – достаточно малое значение σ , позволяющее подкорректировать L_K так, чтобы первый изгиб её совпал с изгибом ЛАХ нескорректированной системы, и данные для интерполирования отмеченных выше nomogramm $\bar{\sigma} = f_1(P_{max})$, $t_p = f_2(P_{max})$, $\vartheta = f_3(P_{max})$.

На основании исходных данных в блоке 2 выполняются следующие операции: 1) рассчитываются ω_K , $20 \lg \omega_K$, ω_c ; 2) первый изгиб L_K на -20 дБ/дек принимается при $\lg \omega_K$ и рассчитывается частота согласования среднечастотной области с правой границей запретной области

$$\omega_{согл1} = \vartheta \omega_K / \omega_c; \quad (3.40)$$

3) в соответствии с выражением

$$L_{cp} = -20 \lg (\omega / \omega_c) \quad (3.41)$$

рассчитываются координаты среднечастотной $L_{\text{ж}}$ при $\omega > \omega_c$, которые сравниваются с координатами L_{HC} и уровнем запаса устойчивости \hbar_2 ; 4) если при $L_{\text{cp}}(\omega_i) - \hbar_2 = 0$ $L_{\text{cp}}(\omega_i) < L_{\text{HC}}(\omega_i)$, то частота согласования среднечастотной и высокочастотной частей же-

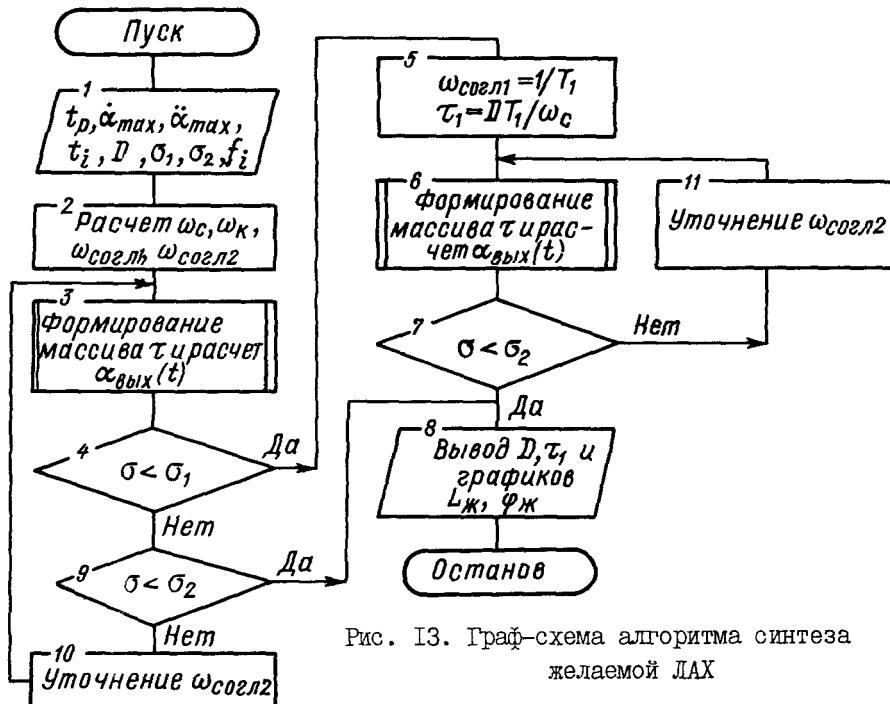


Рис. I3. Граф-схема алгоритма синтеза желаемой ЛАХ

лаемой ЛАХ $\omega_{\text{согл2}}$ определяется из условия пересечения $L_{\text{ж}}$ с L_{HC} , т.е.

$$L_{\text{ж}}(\omega_{\text{согл2}}) = L_{\text{HC}}(\omega_{\text{согл2}}), \quad (3.42)$$

иначе

$$\omega_{\text{согл2}} = \omega_i. \quad (3.43)$$

В блоке 3 анализируются частоты сопряжения L_{HC} , выделяются все $\omega_j \geq \omega_{\text{согл2}}$ и для скорректированной системы формируются массивы постоянных времени инерционных

$$\tau_1 = 1/\omega_K, \tau_2 = 1/\omega_{\text{согл2}}, \tau_3 = T_j, \dots, \tau_\ell = T_{N-1}, \quad (3.44)$$

и дифференцирующих звеньев

$$\tau_{\ell+1} = 1/\omega_{\text{согл1}}, \tau_{\ell+2} = T_K, \dots, \tau_L = T_{N+M-1}. \quad (3.45)$$

Кроме того, здесь же определяется кратность инерционных звеньев с

постоянной времени τ_2 , которая зависит от наклона L_{nc} при частоте $\omega = \omega_{corr2} + 0$ и определяется выражением

$$\sigma = KU - KD, \quad (3.46)$$

где KU , KD – число инерционных и дифференцирующих звеньев с постоянными временем $T_j \geq 1/\omega_{corr2}$ соответственно.

На основании полученной на данном этапе желаемой ЛАХ по стандартной программе рассчитывается переходный процесс и определяется максимальное перегулирование b , значение которого далее в блоках 4 и 9 сравнивается со значениями b_1 и b_2 соответственно.

Если $b < b < b_2$, то полученная с выхода блока 3 желаемая ЛАХ принимается в качестве окончательной и управление процессом автоматизированного синтеза желаемой ЛАХ передаётся операторам вывода блока 8. Если значение b больше значений b_1 и b_2 , то желаемая ЛАХ корректируется путём расширения её среднечастотной области в результате увеличения значения частоты ω_{corr2} в соответствии с оператором блока 10. Если $b < b_1$, то операторами блока 5 рассчитываются новые значения ω_{corr1} и τ_1 :

$$\omega_{corr1} = 1/T_1; \quad (3.47)$$

$$\tau_1 = \mathcal{D}T_1/\omega_c, \quad (3.48)$$

способствующие упрощению структуры коррекции.

Операторы блоков 6, 7 и II аналогичны операторам блоков 3, 9 и 10 соответственно.

Операторами блока 8, кроме графиков ЛАХ и ЛФХ, выводятся параметры желаемой передаточной функции системы (добротность \mathcal{D} и массив постоянных времени динамических звеньев).

7. Алгоритмы синтеза ЛАХ коррекции и выбора схемы корректирующего устройства

Методом ЛАХ обычно синтезируются два вида коррекции систем – последовательная и параллельная. В случае последовательной коррекции корректирующее устройство включается последовательно с основными элементами замкнутого контура управления. При этом передаточная функция разомкнутой системы записывается в виде произведения передаточных функций коррекции и нескорректированной разомкнутой системы

$$K_{ck}(P) = K_{kor}(P) \cdot K_{nc}(P), \quad (3.49)$$

отсюда следует алгоритм расчёта последовательной коррекции в виде

$$L_{\text{кор}} = L_{\text{ск}} - L_{\text{нс}}. \quad (3.50)$$

Учитывая, что на этапе синтеза коррекции ЛАХ скорректированной системы $L_{\text{ск}}$ отождествляется с $L_{\text{ж}}$, окончательно получаем следующий алгоритм синтеза $L_{\text{кор}}$:

$$L_{\text{кор}} = L_{\text{ж}} - L_{\text{нс}}. \quad (3.51)$$

В случае параллельной коррекции корректирующее устройство чаще всего включается по схеме охвата ряда звеньев системы отрицательной обратной связью. Передаточная функция скорректированной системы в этом случае

$$K_{\text{ск}}(p) = K_{\text{нс}}(p) / (1 + K_{\text{кор}}(p) \cdot K_{\text{охв}}(p)), \quad (3.52)$$

где $K_{\text{охв}}(p)$ – передаточная функция звеньев, охваченных корректирующей обратной связью.

Для получения алгоритма синтеза $L_{\text{кор}}$ в знаменателе передаточной функции $K_{\text{ск}}(p)$ пренебрегают единицей и алгоритм записывают в виде

$$L_{\text{кор}} \approx L_{\text{нс}} - L_{\text{ж}} - L_{\text{охв}}. \quad (3.53)$$

Данный алгоритм, как правило, справедлив для области средних частот, где $|K_{\text{кор}}(j\omega) \cdot K_{\text{охв}}(j\omega)| > 1$.

В области низких и высоких частот, где $L_{\text{нс}}$ и $L_{\text{ж}}$ обычно совпадают, $L_{\text{кор}}$ должна быть равна $-\infty$, что практически не представляется возможным реализовать без создания специальных дополнительных устройств, позволяющих осуществить спектральное разложение переходного процесса в темпе реального времени. В связи с этим в области низких частот наклон $L_{\text{кор}}$ должен быть хотя бы не менее $+20$ дБ/дек, а в области высоких частот – не более 0 дБ/дек.

Машинно-ориентированный алгоритм синтеза $L_{\text{кор}}$ для данного случая представлен в виде укрупнённой граф-схемы на рис.14.

Входными данными являются параметры $L_{\text{нс}}$ и $L_{\text{ж}}$ (T_i, τ_i, \mathcal{D}) и тип коррекции ТК, который при последовательной коррекции обозначается цифрой 0, а при параллельной – I. В случае ТК = 0 алгоритм расчёта выполняется согласно (3.51), а в случае ТК = I на начальном шаге $L_{\text{кор}}$ представляется двумя участками:

$$L_{\text{кор}1} = 20 \lg \omega \tau_i - L_{\text{охв}} \quad \text{при } \omega < \omega_{\text{согл}}; \quad (3.54)$$

$$L_{\text{кор}2} = 20 \lg \omega_{\text{согл}} / \tau_i - L_{\text{охв}}(\omega_{\text{согл}}) \quad \text{при } \omega \geq \omega_{\text{согл}}. \quad (3.55)$$

Поскольку параллельная коррекция выполняется по схеме с отри-

цательной обратной связью, то необходима проверка на устойчивость внутреннего замкнутого контура. При отрицательном результате данной проверки уточняется $L_{кор}$, например, путём изменения наклона в области высоких частот.

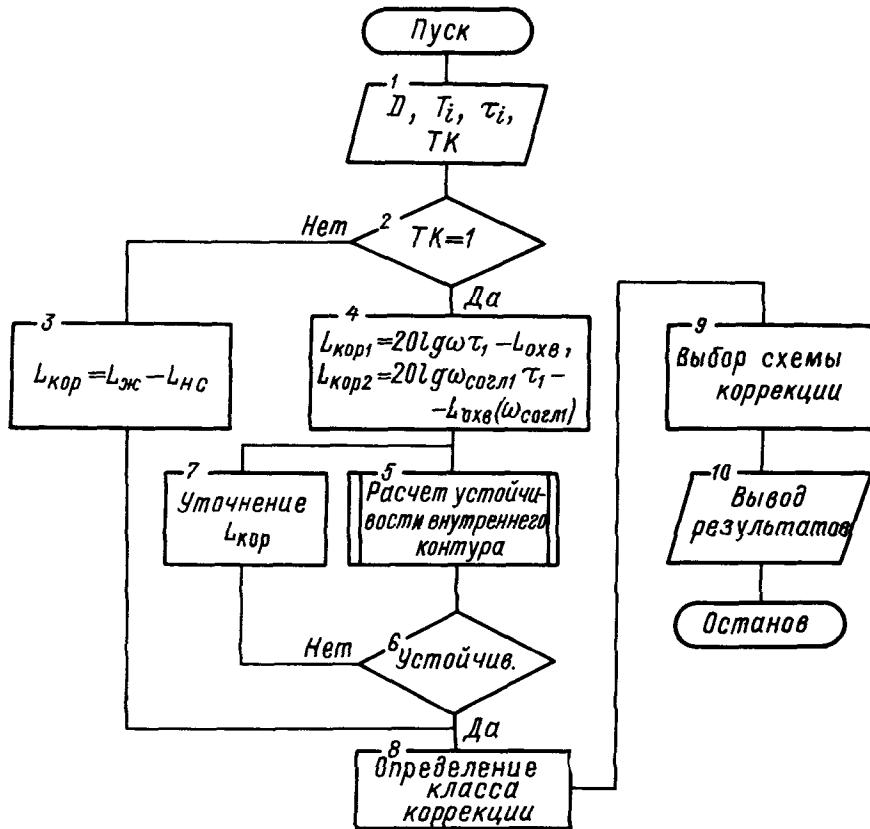


Рис. I4. Граф-схема выбора и расчёта коррекции

По $L_{кор}$ определяется её класс, который может быть обозначен в виде $X1, X2, X3, \dots, XJ, \dots$, где XJ – индекс наклона участка ЛАХ; J – номер участка ЛАХ в порядке увеличения частоты. Например, ЛАХ класса $0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$ имеет наклоны в порядке увеличения частоты $0, +20, +40, \dots, -20, -40, \dots$ дБ/дек. В соответствии с классом $L_{кор}$ выбирается из банка данных схема корректирующего устройства и выполняется расчёт её элементов. На дисплей выдаются тип коррекции, её класс, схема и параметры её элементов.

8. Алгоритмы расчёта переходного процесса

В настоящее время существует значительное число машинно-ориентированных алгоритмов расчёта переходных процессов. Выбор конкретного алгоритма зависит от формы математической модели системы, требуемой точности расчёта, целей и скорости расчёта переходного процесса, наличия соответствующего программного обеспечения и других факторов.

Одни алгоритмы разработаны на основе классических методов численного интегрирования Эйлера, Коши, Рунге-Кутта, Башарина, другие обусловлены особенностями корневых или частотных методов анализа и синтеза систем, третьи связаны с автоматизацией позвенного цифрового моделирования систем и т.п. Рассмотреть здесь все методы, ориентированные на применение ЦВМ, не представляется возможным, поэтому ограничимся некоторыми из них.

Метод Эйлера

Согласно методу Эйлера решение дифференциального уравнения

$$dy/dt = f(t, y) \quad (3.56)$$

на N -м шаге записывается в виде

$$y[N] = y[N-1] + \Delta t f((N-1), y[N-1]), \quad (3.57)$$

где Δt - шаг квантования решения по времени.

Равенство (3.57) означает, что на отрезке $[\Delta t(N-1), \Delta t N]$ исходная интегральная кривая заменяется прямолинейным отрезком, выходящим из $(N-1)$ -й узловой точки с угловым коэффициентом, равным функции $f((N-1), y[N-1])$.

Если точное решение разложить в ряд Тейлора, то сумма первых двух членов ряда Тейлора будет соответствовать приближённому решению, получаемому методом Эйлера. Поскольку степень полинома на основе первых двух членов ряда Тейлора не превышает единицы, то метод Эйлера характеризуют по точности первым порядком. Погрешность метода в отношении каждого отдельного шага убывает с уменьшением Δt . Однако необходимо иметь в виду, что с уменьшением Δt для заданного временного интервала увеличивается число шагов, что может свести на нет стремление повысить точность приближённого решения в интегральном смысле. Обычно метод Эйлера используется в случаях, когда нужно получить примерное представление о решении

на небольшом временном интервале. Вместе с тем знание и глубокое понимание метода Эйлера является весьма важным моментом в задачах численного интегрирования, поскольку на его основе строятся многие алгоритмы повышенной точности.

Усовершенствованный метод Эйлера

Сущность этого метода заключается в том, что сначала рассчитывается вспомогательное значение искомого решения $y[N+1/2]$ с помощью формулы

$$y[N+1/2] = y[N] + \frac{1}{2} \Delta t f(N, y[N]). \quad (3.58)$$

Далее находится значение правой части (3.56) в средней точке

$$f[N+1/2] = f([N+1/2], y[N+1/2]), \quad (3.59)$$

а затем полагают

$$y[N+1] = y[N] + \Delta t f[N+1/2]. \quad (3.60)$$

Данный метод имеет второй порядок точности. Более высокая точность по сравнению с обычным методом Эйлера достигается за счёт лучшей аппроксимации производной путём сохранения большего числа членов ряда Тейлора. Вместе с тем данный метод требует значительно больших затрат машинного времени..

Усовершенствованный метод Эйлера-Коши

Согласно этому методу сначала определяется вспомогательная величина

$$\tilde{y}[N+1] = y[N] + \Delta t f(N, y[N]), \quad (3.61)$$

а затем искомое решение по формуле

$$y[N+1] = y[N] + \frac{\Delta t}{2} [f(N, y[N]) + f(N+1, \tilde{y}[N+1])]. \quad (3.62)$$

Точность, как и в предыдущем случае, имеет второй порядок.

Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта является одним из наиболее употребительных методов повышенной точности. Идея этого метода имеет много общего с идеей метода Эйлера, поскольку в их основе лежит разложение решения переходного процесса в ряд Тейлора в окрестности $t = N \cdot \Delta t$

$$y(t) = y[N] + \frac{\Delta t}{1!} \frac{dy}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{d^4y}{dt^4} + \dots \quad (3.63)$$

В зависимости от того, до какого числа членов разложения ограничиваются в данном выражении, получают ту или иную точность приближённого решения. Так, удерживая члены до второй степени Δt включительно, приходят к методу Эйлера. В методе Рунге–Кутта ограничиваются четырьмя или пятью членами разложения, т.е. с удержанием членов со степенями до Δt^3 или Δt^4 включительно. Соответственно получают методы Рунге–Кутта третьего и четвёртого порядков. Последний нашёл наибольшее применение.

Алгоритм вычислительного процесса по методу Рунге–Кутта четвёртого порядка выглядит следующим образом:

$$y[N+1] = y[N] + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (3.64)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \Delta t f(N, y[N]); \\ K_2 &= \Delta t f(N+1/2, y[N] + K_1/2); \\ K_3 &= \Delta t f(N+1/2, y[N] + K_2/2); \\ K_4 &= \Delta t f(N+1, y[N] + K_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Поскольку метод Рунге–Кутта является наиболее точным численным методом, то он входит в стандартное математическое обеспечение ЦВМ для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод Тастина

Цифровое моделирование непрерывных динамических систем по методу Тастина сводится к подстановке в передаточную функцию $K(p)$ вместо оператора p следующего выражения [16]:

$$P = 2(z-1)/(\Delta t(z+1)), \quad (3.66)$$

где z – оператор z – преобразования; Δt – шаг интегрирования.

Используя подстановку Тастина, напишем алгоритмы цифрового моделирования интегрирующего и инерционного звеньев соответственно:

$$y[N] = y[N-1] + \frac{K \Delta t}{2T} (x[N] + x[N-1]); \quad (3.67)$$

$$y[N] = \frac{1 - \Delta t/2T}{1 + \Delta t/2T} y[N-1] + \frac{K \Delta t/2T}{1 + \Delta t/2T} (x[N] + x[N-1]), \quad (3.68)$$

где T , K – постоянная времени и коэффициент передачи звена соответственно; x – входной сигнал.

Достоинством метода Тастина является устойчивость процесса мо-

делирования независимо от величины Δt . Для удовлетворительного моделирования по точности на каждом шаге должно выполняться условие $\Delta t/2T \ll 1$. В [16] рекомендуется ориентировочно выбирать шаг квантования по времени, равный $T/15$.

Позиционное цифровое моделирование систем

Данный метод в своей идеологии эквивалентен методу исследования систем на аналоговых вычислительных машинах (АВМ) по заданной структурной схеме. Отличие заключается в том, что в случае исследования систем на АВМ отдельные динамические звенья моделируются с помощью операционных усилителей, включённых в общую машинную схему в соответствии со структурной схемой конкретной системы, а в случае использования ЦВМ – с помощью подпрограмм, порядок прохождения которых по каждому приращению независимой переменной Δt определяется также структурной схемой системы.

Для моделирования каждого отдельного типового звена в принципе может быть использован любой из описанных выше алгоритмов. Однако здесь воспользуемся алгоритмом, построенным на основе использования интеграла свёртки.

Моделирование интегрирующего и инерционного звеньев. С учётом интеграла свёртки рекуррентное уравнение для переходного процесса в интегрирующем звене запишем в виде

$$y[N] = y[N-1] + \int_{\Delta t(N-1)}^{\Delta t N} K(\tau - \Delta t(N-1)) \cdot x(\Delta t N - \tau) d\tau, \quad (3.69)$$

где $K(\tau) = K/T$ – импульсная переходная функция; $y[N]$, $y[N-1]$ – значения выходной величины в моменты времени $t = \Delta t N$, $t = \Delta t(N-1)$ соответственно; $N = 0, 1, 2, \dots$; x – входная величина.

Аппроксимируя интеграл методом трапеций, получим

$$y[N] = y[N-1] + K \frac{\Delta t}{2T} (y[N] + y[N-1]). \quad (3.70)$$

Для инерционного звена соответственно можно написать

$$y[N] = e^{-\frac{\Delta t}{T}} y[N-1] + K \frac{\Delta t}{2T} (y[N] + e^{-\frac{\Delta t}{T}} y[N-1]). \quad (3.71)$$

Приводя типовые динамические звенья к комбинации включения интегрирующего, инерционного и безынерционного звеньев, можно получить алгоритмы цифрового моделирования других звеньев. Рассмотрим некоторые из них.

Реальное дифференцирующее звено с передаточной функцией

$$K(P) = T_1 P / (T_2 P + 1) \quad (3.72)$$

будет иметь следующий алгоритм цифрового моделирования:

$$\left. \begin{aligned} y[N] &= y_2[N] - y_1[N]; \\ y_1[N] &= C_2 y[N-1] + C_1 (x[N] + C_2 x[N-1]); \\ y_2[N] &= C_3 x[N], \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

где $C_1 = \Delta t (T_2 - T_1) / (2 T_2^2); \quad C_2 = e^{-\Delta t / T_2}; \quad C_3 = T_1 / T_2;$

реальное дифференцирующее звено со статизмом

$$K(P) = (T_1 P + 1) / (T_2 P + 1) - \quad (3.74)$$

$$\left. \begin{aligned} y[N] &= y_1[N] + y_2[N]; \\ y_1[N] &= C_2 y[N-1] + C_1 (x[N] + C_2 x[N-1]); \\ y_2[N] &= C_3 x[N], \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

где $C_1 = \Delta t (T_2 - T_1) / (2 T_2^2); \quad C_2 = e^{-\Delta t / T_2}; \quad C_3 = T_1 / T_2;$

апериодическое звено второго порядка

$$K(P) = K / (T_1^2 P^2 + T_2 P + 1) - \quad (3.76)$$

$$\left. \begin{aligned} y[N] &= y_2[N] - y_1[N]; \\ y_1[N] &= C_2 y_2[N-1] + C_1 (x[N] + C_2 x[N-1]); \\ y_2[N] &= C_4 y_2[N-1] + C_3 (x[N] + C_4 x[N-1]), \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

где $C_1 = K \Delta t / (2 \sqrt{T_2^2 - 4 T_1^2}); \quad C_2 = e^{\alpha \Delta t}; \quad C_3 = C_1; \quad C_4 = e^{\beta \Delta t};$
 $\alpha = (-T_2 + \sqrt{T_2^2 - 4 T_1^2}) / (2 T_1^2); \quad \beta = (-T_2 - \sqrt{T_2^2 - 4 T_1^2}) / (2 T_1^2);$

колебательное звено

$$K(P) = K / (T_1^2 P^2 + T_2 P + 1) - \quad (3.78)$$

$$y[N] = C_1 y[N-1] - C_2 y[N-2] + C_3 x[N-1], \quad (3.79)$$

где $C_1 = 2 e^{-\alpha \Delta t} \cos \beta \Delta t; \quad C_2 = e^{-2 \alpha \Delta t};$

$$C_3 = K e^{-\alpha \Delta t} \Delta t \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \sin \beta \Delta t;$$

$$\alpha = T_2 / (2 T_1^2); \quad \beta = \sqrt{4 T_1^2 - T_2^2} / (2 T_1^2).$$

Методы прогноза и коррекции

В методах прогноза и коррекции [22] для вычисления положения новой точки используется информация о нескольких ранее полученных точках. Эти методы не обладают свойством "самостартования". Поэтому для расчёта первых нескольких точек применяются достаточно точные одношаговые методы, например метод Рунге–Кутта. Алгоритм расчёта переходного процесса по дифференциальному уравнению, заданному в нормальной форме Коши

$$y'(t) = f(t, y), \quad (3.80)$$

согласно методам прогноза и коррекции сводится к следующему. Сначала по формуле прогноза и исходным значениям переменных определяют значение $y^{(0)}[N+1]$, где верхний индекс (0) означает, что прогнозируемое значение является одним из последовательности значений y в $(N+1)$ -й точке, располагающихся в порядке возрастания точности. По значению $y^{(0)}[N+1]$ с помощью (3.80) находят производную

$$y^{(0)'}[N+1] = f(\Delta t(N+1), y^{(0)}[N+1]),$$

которая затем подставляется в формулу коррекции для вычисления уточнённого значения $y^{(1)}[N+1]$, которое в свою очередь используется для получения более точного значения производной. Процесс прогноза и коррекции продолжается до тех пор, пока не будет получена требуемая точность расчёта y и y' в $(N+1)$ -й точке. Далее делается следующий $(N+2)$ -й шаг, на котором повторяются процедуры прогноза и коррекции в отношении расчёта значений y и y' для $(N+2)$ -й точки. Особенность конкретного метода прогноза и коррекции зависит от метода численного интегрирования.

Метод Милна. В этом методе на этапе прогноза используется формула Милна [22]

$$y[N+1] = y[N-3] + \frac{4}{3} \Delta t (2y'[N] - y'[N-1] + 2y'[N-2]) + \frac{28}{90} \Delta t^5 y^{(5)}, \quad (3.81)$$

на этапе коррекции – формула Симпсона

$$y[N+1] = y[N-1] + \frac{1}{3} \Delta t (y'[N+1] + 4y'[N] + y'[N-1]) - \frac{1}{90} \Delta t^5 y^{(5)}. \quad (3.82)$$

Последние члены в обеих формулах данного и последующих методов в действительности в итерационных процессах уточнения не участвуют и служат лишь для оценки ошибки усечения. Метод Милна используют

реже, чем другие методы, так как ему присущи неустойчивость и накопление ошибок, появившихся на предыдущих этапах расчёта.

Метод Адамса-Башфорта. Этот метод, как и предыдущий, имеет четвёртый порядок точности. На этапе прогноза используется формула

$$y[N+1] = y[N] + \frac{1}{24} \Delta t (55 y'[N] - 59 y'[N-1] + \\ + 37 y'[N-2] - 9 y'[N-3]) + \frac{251}{720} \Delta t^5 y^{(5)}, \quad (3.83)$$

а на этапе коррекции –

$$y[N+1] = y[N] + \frac{1}{24} \Delta t (9 y'[N+1] - 19 y'[N] - \\ - 5 y'[N-1] + y'[N-2]) + \frac{19}{720} \Delta t^5 y^{(5)}. \quad (3.84)$$

Расчёты по методу Адамса-Башфорта выполняются аналогично расчётом по методу Милна, однако в отличие от последнего погрешность, внесённая на каком-либо шаге, не имеет тенденции роста на последующих шагах расчёта.

Метод Хемминга. В основе метода Хемминга лежат следующие формулы прогноза и коррекции соответственно:

$$y[N+1] = y[N-3] + \frac{4}{3} \Delta t (2 y'[N] - y'[N-1] + \\ + 2 y'[N-2]) + \frac{28}{90} \Delta t^5 y^{(5)}; \quad (3.85)$$

$$y[N+1] = \frac{1}{8} [9 y[N] - y[N-2] + 3 \Delta t (y'[N+1] + \\ + 2 y'[N] - y'[N-1])] - \frac{1}{40} \Delta t^5 y^{(5)}. \quad (3.86)$$

Благодаря простоте и устойчивости этот метод является одним из наиболее распространённых методов прогноза и коррекции. Более детально ознакомиться с методами прогноза и коррекции можно в [22].

Векторный метод расчёта переходных процессов

Если математическая модель системы задана в векторно-матричной форме

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{A} \mathbf{y} + \mathbf{F}(t), \quad (3.87)$$

где \mathcal{A} – квадратная матрица коэффициентов; \mathbf{y} – вектор перемен-

ных состояния; $F(t)$ – вектор внешних воздействий, то, как показано в [3], рекуррентная формула для организации расчёта переходных процессов на ЦВМ записется в виде

$$y[N+1] = D_m(y[N] + \Delta t F(N\Delta t)), \quad (3.88)$$

$$\text{где } D_m = E + \sum A_i / (i! R^i) \quad (i=1, 2, \dots, m) - \quad (3.89)$$

функционально-преобразованная матрица; R – радиус круга с центром в точке $(-R, 0)$, ограничивающего область распределения спектра матрицы A ; $\Delta t = 1/R$ – шаг интегрирования; E – единичная матрица.

Если $m=1$, то алгоритм (3.88) примет вид

$$y[N+1] = (E + A\Delta t)(y[N] + \Delta t F(N\Delta t)). \quad (3.90)$$

При $m=2$ соответственно имеем

$$y[N+1] = (E + A\Delta t + \frac{A^2}{2!} \Delta t^2)(y[N] + \Delta t F(N\Delta t)). \quad (3.91)$$

Алгоритм (3.88) при надлежащем выборе шага интегрирования Δt не накладывает каких-либо принципиальных ограничений на характер внешних воздействий, которые могут иметь достаточно интенсивный характер и иметь разрывы.

9. Вспомогательные машинно-ориентированные алгоритмы

В процессе машинного проектирования как следящих, так и других систем автоматического управления возникает необходимость в самых различных вспомогательных машинно-ориентированных алгоритмах, например в алгоритмах для расчёта значений полиномов, их коэффициентов и корней и т.п. Приведем некоторые из них.

Алгоритм расчёта значений полиномов

С целью исключения возвведения в степень независимой переменной полином

$$F(p) = A_0 p^N + A_1 p^{N-1} + \dots + A_{N-1} p + A_N, \quad (3.92)$$

где A_0, A_1, \dots, A_N – постоянные коэффициенты; p – независимая переменная, обычно записывают в скобочно-гнездовом виде

$$F(p) = A_N + p(A_{N-1} + p(A_{N-2} + p(\dots + p(A_1 + p(A_0) \dots))). \quad (3.93)$$

Если ввести промежуточные переменные $f(p)$ и $\psi(p)$ и в качестве начального значения $\psi(p)$ принять $\psi_1(p) = A_0 P$, то получим ма-

шинно-ориентированный алгоритм в виде следующих рекуррентных формул:

$$\left. \begin{array}{l} f_i(p) = A_i + \varphi_i(p) \quad \text{при } i \in [1, N]; \\ \varphi_i(p) = p f_{i-1}(p) \quad \text{при } i \in [2, N]; \\ F(p) = f_N(p). \end{array} \right\} \quad (3.94)$$

Обобщённые формулы расчёта коэффициентов полинома по вектору корней и постоянных времени звеньев

Если известны корни, то коэффициенты полинома

$$F(p) = \prod_{i=1}^N (p - P_i) = p^N + A_1 p^{N-1} + A_2 p^{N-2} + \dots + A_{N-1} p + A_N \quad (3.95)$$

можно рассчитать с помощью следующих обобщённых формул:

$$A_\ell = (-1)^\ell \sum_{i=1}^{N-\ell+1} P_i \left(\sum_{j=i+1}^{N-\ell+2} P_j \left(\dots \left(\sum_{\lambda=m+1}^N P_\lambda \right) \dots \right) \right); \quad (3.96)$$

$$A_\ell = (-1)^\ell \sum_{i=N}^{\ell} P_i \left(\sum_{j=\ell-1}^{\ell-1} P_j \left(\dots \left(\sum_{\lambda=m+1}^1 P_\lambda \right) \dots \right) \right), \quad (3.97)$$

где $\ell \in [1, N]$ – индекс коэффициента; $P_i, P_j, \dots, P_\lambda$ – корни полинома; i, j, \dots, λ – целые числа в указанных в (3.95) и (3.96) пределах; N – степень полинома.

Если часть системы состоит из последовательного соединения L инерционных звеньев, то коэффициенты полинома

$$F(p) = \prod_{i=1}^L (T_i p + 1) = A_0 p^L + A_1 p^{L-1} + A_2 p^{L-2} + \dots + A_{L-1} p + A_L \quad (3.98)$$

можно рассчитать с помощью обобщённых формул:

$$A_{L-\ell} = \sum_{i=1}^{L-\ell+1} T_i \left(\sum_{j=i+1}^{L-\ell+2} T_j \left(\dots \left(\sum_{\lambda=m+1}^L T_\lambda \right) \dots \right) \right); \quad (3.99)$$

$$A_{L-\ell} = \sum_{i=L}^{\ell} T_i \left(\sum_{j=L-1}^{\ell-1} T_j \left(\dots \left(\sum_{\lambda=m+1}^1 T_\lambda \right) \dots \right) \right), \quad (3.100)$$

где $T_i, T_j, \dots, T_\lambda$ – постоянные времени звеньев; $A_L = 1$; $\ell \in [1, L]$.

Машинно-ориентированные алгоритмы расчёта коэффициентов полиномов по вектору корней

Алгоритм Римского. Данный алгоритм [14] построен на основе обобщённой формулы (3.97), которая применительно к построению ма-

шинно-ориентированного алгоритма может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} A_\ell &= (-1)^\ell P_N \sum_{j=N-1}^{\ell-1} P_j \left(\sum_{K=j+1}^{\ell-2} P_K \left(\cdots \left(\sum_{\lambda=m+1}^N P_\lambda \right) \cdots \right) \right) + \\ &+ (-1)^\ell \sum_{j=N-1}^{\ell-1} P_j \left(\sum_{K=j+1}^{\ell-1} P_K \left(\cdots \left(\sum_{\lambda=m+1}^{\ell-2} P_\lambda \right) \cdots \right) \right). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Если ввести в рассмотрение коэффициенты с двойной индексацией $A_\ell^{(j)}$, где j – максимальная степень полинома $\Pi(P-P_i)$, $i \in [1, j]$, то на основании (3.101) можно написать

$$A_\ell^{(N)} = A_\ell^{(N-1)} - P_N A_{\ell-1}^{(N-1)}. \quad (3.102)$$

Заменяя N на j , получим искомый машинно-ориентированный алгоритм

$$A_\ell^{(j)} = A_\ell^{(j-1)} - P_j A_{\ell-1}^{(j-1)}. \quad (3.103)$$

Если до начала расчёта принять известными

$$A_0^{(j)} = 1, \quad A_1^{(1)} = -P_1, \quad A_\ell^{(1)} = 0 \quad (\ell > 1),$$

то алгоритм сводится к последовательному расчёту всех коэффициентов сначала полинома $A(P, 2)$, затем – $A(P, 3)$ и т.д. до полинома $A(P, N)$, коэффициенты которого являются искомыми. Данный алгоритм можно охарактеризовать как горизонтально-вертикальный. Горизонтальное движение осуществляется по ℓ , а вертикальное – по j .

Горизонтально-векторный алгоритм. В качестве исходной при выводе данного алгоритма используем обобщённую формулу (3.96), на основании которой напишем выражения для $(\ell-1)$ -го и ℓ -го коэффициентов

$$A_{\ell-1} = (-1)^{\ell-1} \sum_{j=1}^{N-\ell+2} P_j \left(\sum_{K=j+1}^{N-\ell+3} P_K \left(\cdots \left(\sum_{\lambda=m+1}^N P_\lambda \right) \cdots \right) \right); \quad (3.104)$$

$$A_\ell = - \sum_{i=1}^{N-\ell+1} P_i \left[(-1)^{\ell-1} \sum_{j=k+1}^{N-\ell+2} P_j \left(\sum_{K=j+1}^{N-\ell+3} P_K \left(\cdots \left(\sum_{\lambda=m+1}^N P_\lambda \right) \cdots \right) \right) \right]. \quad (3.105)$$

Вводя в рассмотрение вектор $X^{(\ell-1)}$ с компонентами

$$X^{(\ell-1), j} = (-1)^{\ell-1} P_j \sum_{K=j+1}^{N-\ell+3} P_K \left(\sum_{y=k+1}^{N-\ell+4} P_y \left(\cdots \left(\sum_{\lambda=m+1}^N P_\lambda \right) \cdots \right) \right), \quad (3.106)$$

получим алгоритм расчёта коэффициентов характеристического полинома

нома системы по вектору его корней в виде следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} X[1,j] &= -P_j; \\ X[\ell,j] &= -P_j \sum_{k=j+1}^{N-\ell+2} X[(\ell-1), k]; \\ A_\ell &= \sum_{j=1}^{N-\ell+1} X[\ell,j]. \end{aligned} \right\} \quad (3.107)$$

Пример. Пусть $N=3$. Тогда при $\ell=1$ $N-\ell+1=3$, $X[1,1]=-P_1$, $X[1,2]=-P_2$, $X[1,3]=-P_3$, $A_1=\sum_{j=1}^3 X[1,j]=-(P_1+P_2+P_3)$; при $\ell=2$ $N-\ell+1=2$, $N-\ell+2=3$, $X[2,1]=-P_1(X[1,2]+X[1,3])=-P_1(-P_2-P_3)=P_1(P_2+P_3)$, $X[2,2]=-P_2(X[1,3])=-P_2(-P_3)=P_2P_3$, $A_2=P_1(P_2+P_3)+P_2P_3$; при $\ell=3$ $N-\ell+1=1$, $N-\ell+2=2$, $X[3,1]=-P_1(X[2,2])=-P_1P_2P_3$, $A_3=\sum_{j=1}^1 X[3,j]=X[3,1]=-P_1P_2P_3$.

Полученный результат совпадает с общеизвестным результатом для данного случая, что подтверждает работоспособность алгоритма.

Ускоренный горизонтально-векторный алгоритм. Предыдущий алгоритм обладает оптимальными свойствами по числу операций умножения, но содержит повторяющиеся операции сложения, которые можно исключить, преобразовав алгоритм (3.107) к виду

$$X[1,j] = -P_j \quad (j \in [1, N]); \quad (3.108)$$

$$S[\ell, 0] = X[(\ell-1), 1] \quad (\ell \in [2, N+1]); \quad (3.109)$$

$$\left. \begin{aligned} X[\ell,j] &= -P_{\ell-1+j} \cdot S[\ell, j-1]; \\ S[\ell,j] &= S[\ell, j-1] + X[\ell-1, j+1]; \\ \ell &\in [2, N]; \quad j \in [1, N+1-\ell]; \end{aligned} \right\} \quad (3.110)$$

$$A_{\ell-1} = S[\ell, N+1-\ell] \quad (\ell \in [2, N+1]). \quad (3.111)$$

Несмотря на объёмное математическое представление, на ЦВМ алгоритм реализуется исключительно просто. Так, двухмерный массив $X(\ell, j)$ заменяется на одномерный $-X(j)$, компоненты которого частично обновляются при прохождении очередного цикла по ℓ , а двухмерный массив $S(\ell, j)$ вообще превращается в переменную S . Данный

алгоритм для своей реализации требует $N(N-1)/2$ операций умножения и такого же числа основных операций сложения. В случае использования алгоритма Римского необходимо затратить $(N^2+N-2)/2$ операций умножения и $(N^2+3N-4)/2$ – сложения. Особенno ощутима эффективность ускоренного алгоритма в сравнении с алгоритмами на основе формул для элементарных симметрических многочленов, которые для расчёта каждого коэффициента характеристического полинома требуют отдельной подпрограммы и суммарно $\sum (i-1) C_N^i$ и $\sum (C_N^i - 1)$, где C_N^i – число сочетаний из N элементов по i , $i \in [1, N]$, операций умножения и сложения соответственно.

Алгоритм расчёта коэффициентов полинома
по постоянным времени инерционных звеньев

Машинный расчёт коэффициентов полинома

$$F(P) = \prod_{i=1}^N (T_i P + 1) = 1 + C_1 P + C_2 P^2 + \dots + C_N P^N, \quad (3.II2)$$

где T_i – постоянная времени i -го звена; C_1, C_2, \dots, C_N – искомые коэффициенты, может быть выполнен по алгоритмам, которые по своей структуре аналогичны алгоритмам расчёта коэффициентов по корням. В связи с этим приведём лишь аналог ускоренного алгоритма

$$X[1, i] = T_i \quad (i \in [1, N]); \quad (3.II3)$$

$$S[\ell, 0] = X[\ell-1, 1] \quad (\ell \in [2, N+1]); \quad (3.II4)$$

$$\left. \begin{array}{l} X[\ell, i] = T_{\ell-i+i} \cdot S[\ell, i-1]; \\ S[\ell, i] = S[\ell, i-1] + X[\ell-1, i+1]; \\ \ell \in [2, N]; \quad i \in [1, N+1-\ell]; \end{array} \right\} \quad (3.II5)$$

$$C_{\ell-1} = S[\ell, N+1-\ell] \quad (\ell \in [2, N+1]). \quad (3.II6)$$

Алгоритмы преобразования форм полиномов

Полиномы в задачах автоматического управления обычно представляются в следующих двух формах:

$$F(P) = A_0 P^N + A_1 P^{N-1} + \dots + A_{N-1} P + A_N; \quad (3.II7)$$

$$F(P) = C_0 + C_1 P + C_2 P^2 + \dots + C_{N-1} P^{N-1} + C_N P^N. \quad (3.II8)$$

Переход от одной формы к другой можно выполнить по алгоритмам:

$$A_i = C_{N-i}, \quad C_i = A_{N-i} \quad (i \in [0, N]). \quad (3.II9)$$

Алгоритмы понижения степени полинома

Данные алгоритмы предполагают, что один или несколько корней исходного полинома (3.95) известны, и связаны с процедурой деления его на двухчлен или трёхчлен в зависимости от типа корней.

В случае действительных корней деление осуществляется на двухчлен ($P - \alpha$), где α – корень исходного полинома. Здесь возможны два вида алгоритмов расчёта коэффициентов искомого полинома

$$F(P) = P^{N-1} + B_1 P^{N-2} + B_2 P^{N-3} + \dots + B_{N-2} P + B_{N-1}. \quad (3.120)$$

Выход первого алгоритма основан на умножении (3.120) на ($P - \alpha$) и сравнении полученного результата с исходным полиномом (3.95). Данный алгоритм является наиболее распространённым и имеет вид

$$B_1 = A_1 + \alpha; \quad B_l = A_l + \alpha B_{l-1} \quad (l \in [2, N-1]). \quad (3.121)$$

Если учесть, что $B_{N-1} = -A_N / \alpha$, то на основе (3.121) можно написать второй алгоритм

$$B_{N-l} = - (A_{N+l-i} - B_{N+l-i}) / \alpha \quad (i \in [2, N-1]). \quad (3.122)$$

В случае комплексных корней $P_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ исходный полином делится на трёхчлен ($P^2 + q_1 P + q_2$), где $q_1 = -2\alpha$, $q_2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Алгоритм понижения степени исходного полинома для данного случая будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= A_1 - q_1; & B_2 &= A_2 - q_1 B_1 - q_2; \\ B_l &= A_l - q_1 B_{l-1} - q_2 B_{l-2} & (l \in [3, N-2]). \end{aligned} \right\} \quad (3.123)$$

Алгоритмы решения алгебраических уравнений

Для решения алгебраических уравнений на ЦВМ наибольшее распространение нашли итерационные алгоритмы. При этом исходное уравнение $F(P) = 0$ приводят к виду

$$P[i+1] = \Psi(P[i], P[i-1], \dots, P[i-2]), \quad (3.124)$$

где $P[i]$ – значение корня на i -ом шаге итераций. Каждый конкретный метод, на основе которого строится алгоритм, отличается особынностью функции Ψ . Наиболее известным является метод Ньютона, согласно которому алгоритм записывается в виде

$$P[i+1] = P[i] - F(P[i]) / F'(P[i]), \quad (3.125)$$

где $F'(p)$ – производная от $F(p)$ по p . Алгоритм устойчив относительно простых корней и неустойчив относительно кратных корней.

В случае поиска кратных корней можно воспользоваться алгоритмом

$$P[i+1] = P[i] - F^{(y-1)}(P[i]) / F^{(y)}(P[i]), \quad (3.126)$$

где $F^{(y)}(p)$, $F^{(y-1)}(p)$ – y и $(y-1)$ -я производные полинома $F(p)$ по p ; y – кратность корня. Скорость сходимости расчётовых процедур по методу Ньютона относительно невелика. В связи с этим при приближении к окрестности корня целесообразно вывести вычислительный процесс на границу устойчивости и дальнейший расчёт вести по алгоритму

$$\left. \begin{aligned} P_i[i+1] &= P_i[i] + K F(P_i[i]) / F'(P_i[i]); \\ P_i[i+1] &= (P_i[i+1] + P_i[i]) / 2, \end{aligned} \right\} \quad (3.127)$$

где K – коэффициент, обеспечивающий выход итерационного процесса на границу устойчивости.

Если в алгоритме (3.125) заменить дифференциалы на приращения, то получим известный алгоритм по методу хорд

$$P[i+1] = P[i] - \frac{P[i] - P[i-1]}{F(P[i]) - F(P[i-1])} F(P[i]). \quad (3.128)$$

Данный алгоритм не требует расчёта производных полинома $F(p)$, но для его реализации необходимо сохранять в памяти ЦВМ значения аргумента и полинома на шаг назад. В целом алгоритмы по методам Ньютона (метод касательных) и хорд близки по своим свойствам. Начинать расчёт следует с определения действительных корней. После нахождения очередного корня необходимо обращаться к процедуре понижения степени полинома. При таком порядке весьма сложный процесс расчёта комплексных корней будет сведён к операциям над полиномом минимальной сложности, а в ряде случаев и сам расчёт может оказаться элементарным. Так, если полином доведен до полинома третьей степени и известно, что он содержит пару комплексных корней, то после определения действительного корня P_{N-2} , можно сразу написать выражения для действительной и мнимой частей последних корней соответственно:

$$\alpha = -(B_1 + P_{N-2}) / 2; \quad \beta = \sqrt{-(\alpha + B_3 / P_{N-2})}, \quad (3.129)$$

где B_1 , B_3 – коэффициенты полученного полинома третьей степени.

С другими методами и алгоритмами можно ознакомиться в литературе по численным методам решения алгебраических уравнений.

Алгоритмы возведения в степень комплексных аргументов

При решении многих задач проектирования систем автоматического управления возникает необходимость возведения в степень комплексных аргументов

$$p^N = (\alpha + j\beta)^N = D^{(N)}(\alpha, \beta) + j\beta Q^{(N)}(\alpha, \beta), \quad (3.130)$$

где при чётном $N > 2$ полиномы $D^{(N)}(\alpha, \beta)$ и $Q^{(N)}(\alpha, \beta)$ имеют вид

$$D^{(N)}(\alpha, \beta) = \alpha^N + D_1 \beta^2 \alpha^{N-2} + D_2 \beta^4 \alpha^{N-4} + \dots + D_{N/2} \beta^N; \quad (3.131)$$

$$Q^{(N)}(\alpha, \beta) = Q_0 \alpha^{N-1} + Q_1 \beta^2 \alpha^{N-3} + Q_2 \beta^4 \alpha^{N-5} + \dots + Q_{\frac{N}{2}-1} \beta^{N-2} \alpha, \quad (3.132)$$

а при нечётном $N > 1$ —

$$D^{(N)}(\alpha, \beta) = \alpha^N + D_1 \beta^2 \alpha^{N-2} + D_2 \beta^4 \alpha^{N-4} + \dots + D_{(N-1)/2} \beta^{N-1} \alpha; \quad (3.133)$$

$$Q^{(N)}(\alpha, \beta) = Q_0 \alpha^{N-1} + Q_1 \beta^2 \alpha^{N-3} + Q_2 \beta^4 \alpha^{N-5} + \dots + Q_{(N-1)/2} \beta^{N-1}. \quad (3.134)$$

Машинно-ориентированные алгоритмы расчёта коэффициентов полиномов $D^{(N)}(\alpha, \beta)$ и $Q^{(N)}(\alpha, \beta)$ представляются в виде:

$$D_i^{(j)} = D_i^{(j-1)} - Q_{i-1}^{(j-1)}; \quad Q_i^{(j)} = D_i^{(j-1)} + Q_i^{(j-1)}, \quad (3.135)$$

$$D_1^{(2)} = -1; \quad D_{i>1}^{(2)} = 0; \quad Q_0^{(2)} = 2; \quad Q_{i>0}^{(2)} = 0. \quad (3.136)$$

Алгоритмы расчёта полиномов с комплексным аргументом

Полином (3.95) в данном случае запишется в виде

$$F(p) = \operatorname{Re} F(p) + j \operatorname{Im} F(p). \quad (3.137)$$

Реальная и мнимая части $F(p)$ при чётном N соответственно равны:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(p) = & (\alpha^N + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} A_i \alpha^{N-1-i}) + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \beta^{2i} (D_i^{(N)} \alpha^{N-2i} + \\ & + \sum_{j=1}^{N-2i} A_j D_i^{(N-j)} \alpha^{N-2i-j}) + \beta^N D_{N/2}^{(N)}; \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(p) = & \beta \left[(Q_0^{(N)} \alpha^{N-1} + \sum_{j=1}^{N-1} A_j Q_0^{(N-j)} \alpha^{N-1-j}) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \beta^{2i} (Q_i^{(N)} \alpha^{N-1-2i} + \sum_{j=1}^{N-1-2i} A_j Q_i^{(N-j)} \alpha^{N-1-2i-j}) \right]. \end{aligned} \quad (3.139)$$

При нечётном N алгоритмы расчёта составляющих $F(p)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(p) = & (\alpha^N + \sum_{i=1}^N A_i \alpha^{N-i}) + \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \beta^{2i} (D_i^{(N)} + \\ & + \sum_{j=1}^{N-2i} A_j D_i^{(N-j)} \alpha^{N-2i-j}); \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(p) = & \beta \left[(Q_0^{(N)} \alpha^{N-1} + \sum_{i=1}^{N-1} Q_0^{(N-i)} A_i \alpha^{N-i}) + \beta^{N-1} Q_{\frac{N-1}{2}}^{(N)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}-1} \beta^{2i} (Q_i^{(N)} \alpha^{N-1-2i} + \sum_{j=1}^{N-1-2i} A_j Q_i^{(N-j)} \alpha^{N-1-2i-j}) \right], \end{aligned} \quad (3.141)$$

где коэффициенты D и Q с соответствующими индексами рассчитываются по алгоритмам (3.131) ... (3.134); $p = \alpha + j\beta$.

Машинно-ориентированный интерполятор

Машинно-ориентированные алгоритмы интерполирования функций могут быть построены на основе различных известных методов, однако здесь ограничимся алгоритмом на основе интерполяционной формулы Лагранжа

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N+1} y_i \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{N+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{N+1})}, \quad (3.142)$$

где y_i , x_i – значения интерполируемой функции и независимой переменной в i -х узлах интерполяции; $i=1, 2, \dots, N+1$.

Особый интерес для задач автоматизации проектирования систем автоматического управления представляют алгоритмы интерполирования функций с произвольными узлами. Структура высокоеффективного по быстродействию алгоритма для данного случая может быть получена на основе формулы Лагранжа, преобразованной к виду

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N+1} y_i \frac{P_i(x)}{P_2(z)} \Big|_{z=x_i}, \quad (3.143)$$

где

$$P_1(x) = \prod_{i=1}^{N+1} (x-x_i) = x^{N+1} + A_1 x^N + A_2 x^{N-1} + \dots + A_N x + A_{N+1}; \quad (3.144)$$

$$P_2(z) = \prod_{i=1}^{N+1} (z-x_i) = z^{N+1} + A_1 z^N + A_2 z^{N-1} + \dots + A_N z + A_{N+1}. \quad (3.145)$$

Полиномы $F_1(x)$ и $F_2(z)$ с точностью до обозначений независимой переменной совпадают. Для расчёта коэффициентов полиномов можно воспользоваться алгоритмом (3.107), где под вектором \mathbf{P} следует понимать вектор \mathbf{X} с компонентами x_1, x_2, \dots, x_{N+1} , а вместо N следует принять новое \bar{N} , численно равное $N+1$. Деление полинома $F_1(x)$ на бином $(x-x_i)$ можно выполнить с помощью алгоритма (3.121), что в результате даёт полиномы:

$$B_i(x) = x^N + B_{i,1}x^{N-1} + B_{i,2}x^{N-2} + \dots + B_{i,N-1}x + B_{i,N}; \quad (3.146)$$

$$B_i(z) = z^N + B_{i,1}z^{N-1} + B_{i,2}z^{N-2} + \dots + B_{i,N-1}z + B_{i,N}. \quad (3.147)$$

Применяя к полиномам $B_i(z)$ алгоритм (3.94) ($p=z=x_i$), получим коэффициенты

$$\lambda_i = F_2(z)/(z-x_i)|_{z=x_i} = B_i(z)|_{z=x_i}. \quad (3.148)$$

Окончательно полином Лагранжа можно представить в виде

$$f(x) = C_0 x^N + C_1 x^{N-1} + C_2 x^{N-2} + \dots + C_{N-1} x + C_N. \quad (3.149)$$

где коэффициенты C_0, C_1, \dots, C_N могут быть рассчитаны с помощью алгоритмов

$$C_0 = \sum_{i=1}^N y_i / \lambda_i; \quad C_j = \sum_{i=1}^N y_i B_{i,j} / \lambda_i \quad (j > 0). \quad (3.150)$$

Глава 4. ОСОБЕННОСТИ ВЫБОРА И НАСТРОЙКИ ПРОМЫШЛЕННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

I. Критерии качества и методы синтеза промышленных систем регулирования

При проектировании промышленных систем автоматического регулирования к ним предъявляются требования, связанные с динамической и статической точностью, надежностью и работоспособностью в различных режимах, удобством обслуживания, настройки и ремонта, стоимостью и другими технико-экономическими показателями. Некоторые из перечисленных критериев реализуются путём выбора соответствующего типа регулятора. Как отмечалось в первой главе, в нашей

стране выпускаются различные системы общепромышленных регуляторов, например "Каскад", "АКЭСР", удовлетворяющие современным требованиям по надёжности, габаритам, удобству обслуживания, сопрягаемости с управляющими ЦВМ и другим показателям.

Среди показателей качества важнейшее место занимает показатель динамической точности, который обеспечивается выбором соответствующего закона регулирования и настройки регулятора.

Синтез идеального по точности регулятора

Точность системы регулирования тем выше, чем меньше величина ошибки $\epsilon(t)$. Для получения $\epsilon(t)=0$ передаточные функции системы по управлению и ошибке должны удовлетворять условиям:

$$W(p) = 1; \quad W_\epsilon(p) = 1 - W(p) = 0. \quad (4.1)$$

Однако из-за наличия в объекте управления запаздывания T_{ob} передаточная функция идеальной по точности системы имеет вид [12]

$$W(p) = e^{-T_{ob}p}. \quad (4.2)$$

Отсюда передаточная функция разомкнутой идеальной системы равна

$$K(p) = W(p)/(1 - W(p)) = e^{-T_{ob}p}/(1 - e^{-T_{ob}p}). \quad (4.3)$$

Зная передаточную функцию объекта управления, легко получить передаточную функцию регулятора

$$K_p(p) = K(p)/K_{ob}(p), \quad (4.4)$$

где $K_{ob}(p)$ – передаточная функция объекта управления.

Пусть объект управления описывается инерционным звеном первого порядка с запаздыванием

$$K_{ob}(p) = K_{ob} e^{-T_{ob}p}/(T_{ob}p + 1). \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.4) и раскладывая $e^{-T_{ob}p}$ в ряд Тейлора с удержанием первых двух членов разложения, получим

$$K_p(p) = (1 + T_{ob}p)/(K_{ob}T_{ob}p). \quad (4.6)$$

Отсюда следует, что идеальная по точности система с объектом данного вида реализуется с помощью ПИ-регулятора.

Аналогично могут быть получены требуемые законы регулирования в случае других объектов управления.

Синтез систем предельной динамической точности

Синтез систем в данном случае сводится к определению оптимальной передаточной функции замкнутой системы $W_{opt}(P)$, при которой в физически реализуемой системе обеспечивается минимальная среднеквадратичная ошибка (СКО).

При учёте транспортного запаздывания условие физической реализуемости примет вид

$$w(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < \tau_{ob}, \quad (4.7)$$

где $w(t)$ – весовая функция замкнутой системы, оптимальное выражение которой определяется интегральным уравнением Винера – Хопфа:

$$\tilde{\sigma}_{xx}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{opt}(\tau) \tilde{\sigma}_{xx}(\xi - \tau) d\tau, \quad (4.8)$$

где $\tilde{\sigma}_{xx}$ – автокорреляционная функция входного сигнала.

Решение (4.8) находилось бы очень просто, если бы входной сигнал $x(t)$ представлял собой белый шум, для которого $\tilde{\sigma}_{xx}(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ – единичная δ -функция. В этом случае, учитывая свойства δ -функции, получим

$$w_{opt}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < \tau_{ob}; \\ \tilde{\sigma}_{xx}(\xi) & \text{при } \xi \geq \tau_{ob}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Поэтому на входе систему дополняют формирующим фильтром с передаточной функцией $K_\phi(p)$, подобранный так, чтобы при подаче на вход сигнала в виде белого шума $m(t)$ на его выходе появлялся сигнал $x(t)$. Так как плотность белого шума $S_m(\omega) = 1$, то для формирующего фильтра справедливо уравнение

$$|K_\phi(j\omega)|^2 = S_x(\omega). \quad (4.10)$$

Представив $S_x(p)$ в виде произведения

$$S_x(p) = S_x(+p) \cdot S_x(-p), \quad (4.11)$$

найдём передаточную функцию формирующего фильтра

$$K_\phi(p) = S_x(-p). \quad (4.12)$$

Тогда оптимальная весовая функция для системы, имеющей передаточную функцию

$$W'_{opt}(p) = K_\phi(p) \cdot W_{opt}(p) = S_x(+p) \cdot W_{opt}(p), \quad (4.13)$$

будет определяться через взаимную корреляционную функцию в виде

$$w'_{opt}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_{ob}; \\ \sigma_{mx}(t) & \text{при } t \geq \tau_{ob} \end{cases} \quad (4.14)$$

Искомая передаточная функция замкнутой системы будет

$$W_{opt}(p) = W'_{opt}(p) / S_x(+p). \quad (4.15)$$

Пример. Пусть объект управления имеет передаточную функцию

$$K_{ob}(p) = K_{ob} e^{-\tau_{ob} p} / (1 + T_{ob} p), \quad (4.16)$$

а входной сигнал – автокорреляционную функцию

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|t|} \quad (4.17)$$

и соответствующую ей спектральную плотность

$$S_x(p) = 2\alpha \sigma_x^2 / (\alpha^2 - p^2) = (\sigma_x \sqrt{2\alpha}) / (\alpha + p) \cdot (\sigma_x \sqrt{2\alpha}) / (\alpha - p). \quad (4.18)$$

Требуется найти оптимальную передаточную функцию регулятора.

Решение. Из (4.18) находим

$$S_x(+p) = \sigma_x \sqrt{2\alpha} / (\alpha + p). \quad (4.19)$$

Поскольку $S_x(+p) = S_{mx}(p)$, то, применив к (4.19) обратное преобразование Лапласа, получим

$$\sigma_{mx}(t) = \sigma_x \sqrt{2\alpha} / e^{-\alpha t}. \quad (4.20)$$

Весовая функция (4.14) в этом случае запишется в виде

$$w'_{opt}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \alpha; \\ \sigma_x \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq \alpha, \end{cases} \quad (4.21)$$

а передаточная функция –

$$W'_{opt}(p) = \sigma_x \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha \tau_{ob}} e^{-\tau_{ob} p} (\rho + \alpha). \quad (4.22)$$

Отсюда оптимальные передаточные функции замкнутой системы и регулятора будут

$$W_{opt}(p) = W'_{opt}(p) / S_x(+p) = e^{-\alpha \tau_{ob}} e^{-\tau_{ob} p}; \quad (4.23)$$

$$K_{p_{opt}}(p) = e^{-\alpha \tau_{ob}} (1 + T_{ob} p) / (K_{ob} (1 - e^{-\alpha \tau_{ob}} e^{-\tau_{ob} p})). \quad (4.24)$$

При малых значениях τ_{ob} получим идеальный ПИ-регулятор

$$K_{p_{opt}}(p) = (1 + T_{ob} p) / (K_{ob} \tau_{ob} p). \quad (4.25)$$

Синтез систем с заданной динамической точностью

При синтезе систем с заданной динамической точностью широкое распространение получил метод В.А. Бесекерского [2], который позволяет по максимальным значениям скорости и ускорения ($\dot{x}_{max}, \ddot{x}_{max}$)

изменения входного сигнала или возмущения ввести в рассмотрение эквивалентный гармонический сигнал

$$X_3(t) = X_{3\max} \sin \omega_3 t, \quad (4.26)$$

где $X_{3\max} = \dot{X}_{\max}^2 / \ddot{X}_{\max}; \quad \omega_3 = \dot{X}_{\max} / \ddot{X}_{\max}, \quad (4.27)$

выделить на ЛАХ контрольную точку A_K с координатами $\lg \omega_g = \lg \omega_3$, $L(A_K) = 20 \lg (X_{3\max} / \epsilon^\circ)$, где ϵ° – заданная динамическая ошибка, и построить запретную область. Левее контрольной точки граница запретной области проходит с наклоном -20 дБ/дек, а правее её – с наклоном -40 дБ/дек.

Закон регулятора выбирается таким образом, чтобы ЛАХ системы не пересекала указанную запретную область. Рассмотренное касается синтеза систем с астатизмом первого порядка, что достаточно подробно было освещено в третьей главе при синтезе желаемой ЛАХ следящей системы.

В случае статических систем координаты контрольной точки A_K :

$$\lg \omega_g = \lg (\dot{X}_{\max} / X_{\max}); \quad L(A_K) = 20 \lg (X_{\max} / \epsilon^\circ), \quad (4.28)$$

где X_{\max} – максимальное значение входного сигнала. Левее точки A_K граница запретной области проходит параллельно оси абсцисс, а правее до частоты $\omega = \sqrt{\dot{X}_{\max} / X_{\max}}$ – с наклоном -20 дБ/дек, а далее – с наклоном -40 дБ/дек.

Принципы построения желаемой ЛАХ системы с учётом других динамических показателей были подробно рассмотрены в третьей главе.

2. Определение оптимальных параметров настройки регуляторов

В практике проектирования промышленных автоматических систем управления сложный объект обычно аппроксимируется двумя элементарными звенями, соединенными последовательно: инерционным звеном первого порядка и звеном запаздывания – для статического объекта; интегрирующим звеном и звеном запаздывания – для астатического объекта. Для каждого из названных вариантов аппроксимации объекта разработаны nomogramмы для определения оптимальных параметров настройки регуляторов [10]. Некоторые из указанных nomogramм представлены на рис. I.5...20.

Динамические свойства объекта характеризуются коэффициентом передачи K_{ob} , постоянной времени T_{ob} и временем запаздывания τ_{ob} .

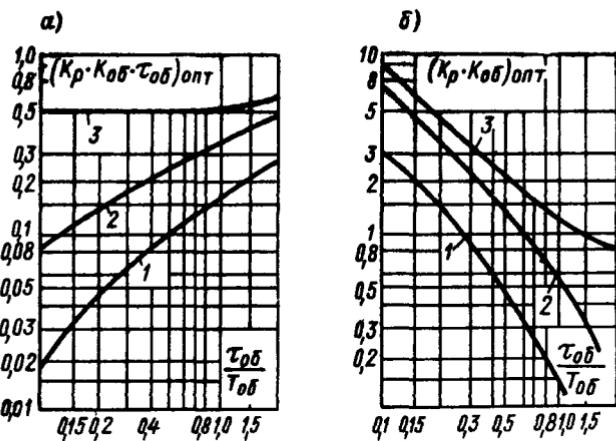


Рис. 15. Номограммы для определения оптимальных параметров настройки И-регуляторов (а) и П-регуляторов (б) (1 – апериодический процесс; 2 – процесс с 20%-ным перерегулированием; в – процесс с минимумом интегральной квадратичной ошибки)

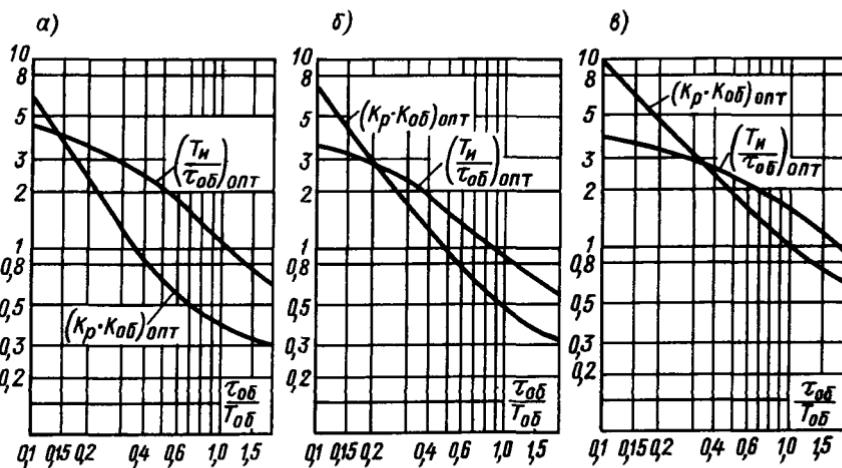


Рис. 16. Номограммы для определения оптимальных параметров настройки ПИ-регуляторов статических объектов (а – апериодический процесс; б – процесс с 20%-ным перерегулированием; в – процесс с минимумом интегральной квадратичной ошибки)

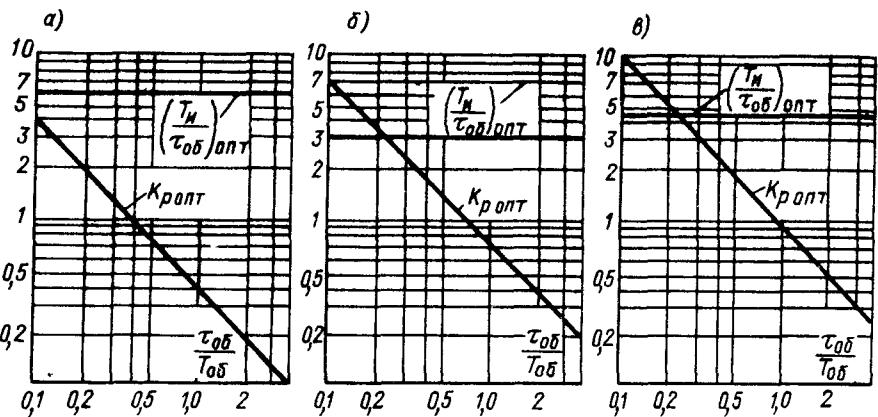


Рис. I7. Номограммы для определения оптимальных параметров настройки И-регуляторов (а) и П-регуляторов (б) (а - апериодический процесс; б - процесс с 20%-ным перерегулированием; в - процесс с минимумом интегральной квадратичной ошибки)

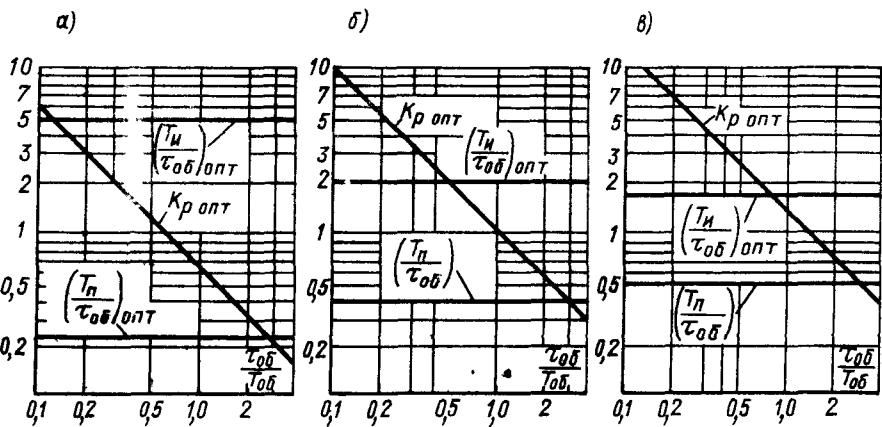


Рис. I8. Номограммы для определения оптимальных параметров настройки ПИД-регуляторов астатических объектов (а - апериодический процесс; б - процесс с 20%-ным перерегулированием; в - процесс с минимумом интегральной квадратичной ошибки)

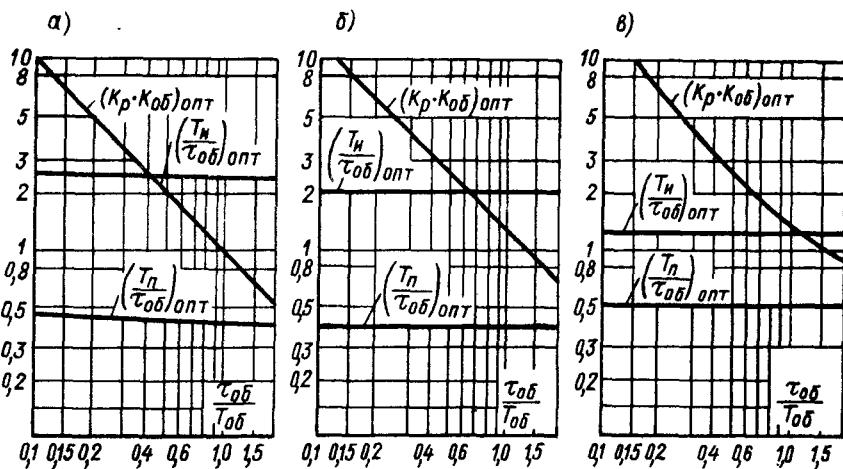


Рис.19. Номограммы для определения оптимальных параметров настройки ПИД-регуляторов статических объектов (а - апериодический процесс; б - процесс с 20%-ным перерегулированием; в - процесс с минимумом интегральной квадратичной ошибки)

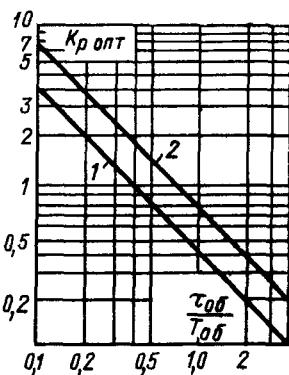


Рис.20. Номограммы для определения оптимальных параметров настройки П-регуляторов астатических объектов (1 - апериодический процесс; 2 - процесс с 20%-ным перерегулированием)

В зависимости от отношения τ_{ob}/T_{ob} для требуемого переходного процесса по номограммам находят некоторые оптимальные соотношения, являющиеся функцией параметров объекта и регулятора, по которым при известных параметрах объекта определяют оптимальные параметры настройки регулятора:

коэффициент передачи И-регулятора

$$K_{r\text{opt}} = (K_r K_{ob} \tau_{ob})_{\text{opt}} / (K_{ob} \tau_{ob}); \quad (4.29)$$

коэффициент передачи П-, ПИ- и ПИД-регуляторов

$$K_{r\text{opt}} = (K_r K_{ob})_{\text{opt}} / K_{ob}; \quad (4.30)$$

постоянную времени изодрома ПИ- и ПИД-регуляторов

$$\tau_{i\text{opt}} = \tau_{ob} (\tau_i / \tau_{ob})_{\text{opt}}; \quad (4.31)$$

постоянную времени предварения для ПИД-регуляторов

$$\tau_{p\text{opt}} = \tau_{ob} (\tau_p / \tau_{ob})_{\text{opt}}. \quad (4.32)$$

Оптимизация системы управления выполняется по критериям либо качества переходного процесса (апериодический переходный процесс и процесс с 20%-ным перерегулированием), либо минимума квадратичной интегральной ошибки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агрегатный комплекс электрических средств регулирования в микроэлектронном исполнении АКЭСР. - ГСП, т. 4, вып. 3, - М.: ЦНИИТЭприборостроения, 1980.
2. Бесекерский В.А. Динамический синтез систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1970.
3. Дидук Г.А. Машинные методы исследования автоматических систем. - Л.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Кавалеров Г.И. Государственная система промышленных приборов и средств автоматизации. - М.: ЦНИИТЭприборостроения, 1981.
5. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. - М.: Высшая школа, 1973.
6. Куропаткин П.В. Оптимальные и самонастраивающиеся системы. - Л.: СЗПИ, 1975.

7. Кухаренко Н.В. Математические модели объектов управления и их статическая идентификация. - Л.: СЗИИ, 1982.
8. Мелса Дж., Джонс Ст. Программы в помощь изучающим теорию линейных систем управления. - М.: Машиностроение, 1981.
9. Микропроцессорные комплексы интегральных схем / Под ред. А.А. Васенкова и В.А. Шахнова. - М.: Радио и связь, 1982.
10. Наладка автоматических систем и устройств управления технологическими процессами / Под ред. А.С. Клюева. - М.: Энергия, 1977.
11. Основы проектирования следящих систем / Под ред. Н.А. Лакоты. - М.: Машиностроение, 1978.
12. Проектирование и надёжность систем автоматики и телемеханики. - Минск: Вышэйшая школа, 1981.
13. Проектирование следящих систем с помощью ЭВМ / Под ред. В.С. Медведева. - М.: Машиностроение, 1979.
14. Римский Г.В. Основы общей теории корневых траекторий систем автоматического управления. - Минск: Наука и техника, 1972.
15. Сборник научных программ на Фортране. - М.: Статистика, 1974.
16. Смит Дж.М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей. - М.: Машиностроение, 1980.
17. Соботка З., Стары Я. Микропроцессорные системы. - М.: Энергоиздат, 1981.
18. Хлыпало Е.И. Нелинейные системы автоматического регулирования. - Л.: Энергия, 1967.
19. Чернецкий В.И., Дидук Г.А., Потапенко А.А. Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. - Л.: Энергия, 1970.
20. Чхартишвили Г.С., Чхартишвили Л.П. Цифровое моделирование динамических систем. - М.: МЭИ, 1978.
21. Штейнберг Ш.Е., Хвилевицкий Л.О., Ястребенецкий М.А. Промышленные автоматические регуляторы. - М.: Энергия, 1973.
22. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. - М.: Мир, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава I. Общие сведения	-
I. Общие сведения о следящих системах	-
2. Общие сведения о регуляторах	7
3. Общие сведения о современных принципах и методах проектирования следящих систем и регуляторов	14
Глава 2. Формы математических моделей динамических объектов и систем	20
I. Понятие математической модели	-
2. Математические модели непрерывных объектов и систем	-
3. Математические модели объектов и систем с дискретным управлением	27
Глава 3. Алгоритмы машинно-ориентированных методов проектирования следящих систем	32
I. Граф-схема алгоритма проектирования следящих систем	-
2. Алгоритмы расчёта и выбора исполнительного механизма	34
3. Выбор и расчёт измерителя рассогласования	39
4. Расчёт требуемого коэффициента усиления усилителя	41
5. Алгоритмы анализа устойчивости линеаризованных систем	43
6. Алгоритмы синтеза желаемой ЛАХ	48
7. Алгоритмы синтеза ЛАХ коррекции и выбора схемы корректирующего устройства	51
8. Алгоритмы расчёта переходного процесса	54
9. Вспомогательные машинно-ориентированные алгоритмы	61
Глава 4. Особенности выбора и настройки промышленных регуляторов	70
I. Критерии качества и методы синтеза промышленных систем регулирования	-
2. Определение оптимальных параметров настройки регуляторов	74
Литература	78